大气多平衡态产生之根源*

李建平 丑纪范
(兰州大学大气科学系,兰州730000)

关键词 平衡态 算子方程 非线性 耗散 外源强迫

大气环流是一个在外源强迫驱动下的有耗散的非线性流体系统,它存在多平衡态[1]. 早在 1958 年,叶笃正等[2]就指出大气环流具有两种基本的平衡态——冬季环流型和夏季环流型. 70 年代末,Charney 等[3,4]利用简单的模式研究了正压、斜压大气的多平衡态现象,从而开创了大气多平衡态理论. 关于多平衡态产生的机制问题,丑纪范[1]利用大尺度大气运动方程,指出多平衡态是非线性的结果. 本文利用完整的原始非线性大气的算子方程来进一步讨论多平衡态产生的根源.

1 算子方程与问题描述

球面$(\lambda, \theta, r; t)$坐标系下,完整的原始大气运动方程组可化为如下的算子方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + (N(\varphi) + L(\varphi))\varphi = \xi(\varphi), & (1) \\ \varphi|_{t=0} = 0, & (2) \end{cases}$$

其中 $\varphi=(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \widetilde{T})'$(符号 $'$ 表示转置), $\varphi = \rho^* \psi = \rho^*(u^*, v^*, w^*, \sqrt{\phi}, T^*)'$, $u = u^*/\sqrt{2}$, $v = v^*/\sqrt{2}$, $w = w^*/\sqrt{2}$, $\rho^* = \sqrt{\rho}$, $T^* = \sqrt{C_v T}$, $\phi = gr$,

$$N(\varphi) = \begin{bmatrix} \mathscr{L} & 2\Omega\cos\theta + (u/r)\mathrm{ctg}\theta & 2\Omega\sin\theta + v/r & 0 & l_1' G \\ -2\Omega\cos\theta - (u/r)\mathrm{ctg}\theta & \mathscr{L} & v/r & 0 & l_2' G \\ -2\Omega\sin\theta - v/r & -v/r & \mathscr{L} & g/\sqrt{2\phi} & l_3' G \\ 0 & 0 & -g/\sqrt{2\phi} & \mathscr{L} & 0 \\ Gl_1 & Gl_2 & Gl_3 & 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix},$$

$$L(\varphi) = \begin{bmatrix} -(\mu_1/3)l_1' - \mu_1 l_4 & -(\mu_1/3)l_1' l_2 & -(\mu_1/3)l_1' l_3 & 0 & 0 \\ -(\mu_1/3)l_2' l_1 & -(\mu_1/3)l_2' l_2 - \mu_1 l_4 & -(\mu_1/3)l_2' l_3 & 0 & 0 \\ -(\mu_1/3)l_3' l_1 & -(\mu_1/3)l_3' l_2 & -(\mu_1/3)l_3' l_3 - \mu_1 l_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 l_5 \end{bmatrix},$$

1995-10-18 收稿,1996-06-12 收修改稿
* 国家重大基础性“气候动力学和气候预测理论研究”资助项目

万方数据

$$\xi(\varphi)=(0,0,0,0,(\varepsilon+\mu_2\alpha_sT_s/C_v)/\widetilde{T})',$$
$$\mathscr{L}=(\Pi+\Lambda)/2,$$
$$\Pi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}u+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}v\sin\theta+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2w,$$
$$\Lambda=\frac{u}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+w\frac{\partial}{\partial r},$$
$$G=RT/\sqrt{2C_v},$$
$$l_1=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*},$$
$$l_2=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho^*}\sin\theta,$$
$$l_3=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*}r^2,$$
$$l_4=\frac{1}{\rho^*}\Delta\frac{1}{\rho^*},$$
$$l_5=(l_4-\alpha_sT_s/\widetilde{T}^2)/C_v,$$
$$l'_1=(1/\rho^*)l_1\rho^*,$$
$$l'_2=(\sin\theta/\rho^*)l_2(\rho^*/\sin\theta),$$
$$l'_3=(r^2/\rho^*)l_3(\rho^*/r^2),$$
$$\Delta=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r},$$

μ_1 为分子粘性系数，μ_2 为湍流热导率，$T_s=T_s(\lambda,\theta)$为地表面温度，$\alpha_s\in L^\infty(S^2)\cap R_+$，其余符号是通常用的．求解区域 $\Omega=S^2\times(r_s,r_\infty)$，这里 $r_s=r_s(\lambda,\theta)$为经度是 λ、余纬是 θ 的地球表面至地心的距离，r_∞为任意大正数，$0<r_s<r_\infty<\infty$.[1)]．

本文研究平衡态问题，即定常的大气运动解的边值问题，因此方程(1)变为

$$N(\varphi)\varphi+L(\varphi)\varphi=\xi(\varphi),\tag{3}$$

其中算子 $L(\varphi)$代表耗散效应，$\xi(\varphi)$为外源强迫．本文从如下几方面进行研究：

(1)略去非线性，但有耗散、有外源．所谓略去非线性，就是将非线性算子 $N(\varphi)$，$L(\varphi)$及 $\xi(\varphi)$中的 φ 当成已知函数，记为 $\bar{\varphi}$．这样 $N(\bar{\varphi})$，$L(\bar{\varphi})$和 $\xi(\bar{\varphi})$便与 φ 无关．至于 $\bar{\varphi}$ 的取法则由所研究的问题而定，原则上说不外乎是某种平均状况，是由实测得来，又被称为基本状况[1]，这不损害问题的物理本质，是“可允许的替代”[5]．于是方程(3)变为

$$N(\bar{\varphi})\varphi+L(\bar{\varphi})\varphi=\xi(\bar{\varphi}).\tag{4}$$

(2)无外源，但是非线性、有耗散，即

$$N(\varphi)\varphi+L(\varphi)\varphi=0.\tag{5}$$

(3)无耗散，但是非线性、有外源，即

1) Li Jianping, Chou Jifan. Further study on the properties of operators of atmospheric equations and the existence of attractor. Acta Meteor Sin, 1996

万方数据

$$N(\varphi)\varphi = \xi(\varphi), \tag{6}$$

这里有外源是指系统总是从外界获得能量,即 $\int_{\Omega}(\varepsilon + \mu_2\alpha_s T_s / C_v)\mathrm{d}\Omega > 0$.

2 主要结果

令 $H_0(\Omega)$是如下内积和范数的完备化空间:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega}\varphi'_1\varphi_2\mathrm{d}\Omega = \int_{r_s}^{r_\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi'_1\varphi_2 r^2\sin\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r, \tag{7}$$

$$\|\varphi\|_0 = (\varphi, \varphi)^{1/2}, \tag{8}$$

$\forall\varphi = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \tilde{T})'$,显然 $H_0(\Omega)$为一 Hilbert 空间. 故有

引理 1　$L(\varphi)$为自伴正定算子,$N(\varphi)$为反伴算子.

定理 1　方程(4)存在唯一解.

引理 2　$(L(\varphi)\varphi, \varphi) = (\tilde{L}\psi, \psi)$, $\forall\varphi = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \tilde{T})'$, $\psi = (u^*, v^*, w^*, \rho^*, T^*)' \in H_0(\Omega)$, $L(\varphi)$中去掉 ρ^* 即为 $\tilde{L}$.

引理 3　$\tilde{L}$ 为自伴正定算子.

定理 2　方程(5)有唯一零解.

定理 3　方程(6)无解.

3 结论

根据以上结果,对于定常的大气运动方程,非线性、耗散和外源强迫三者缺一,则要么解是唯一的,要么无解,不会有多解. 这表明非线性、耗散和外源强迫三者的共同作用是产生多平衡态的根源. 因此,对于大气多平衡态问题、与多平衡态相伴随的分叉和突变、中长期天气过程的研究都应同时考虑这三者的作用,否则是不适当的.

参　考　文　献

1 丑纪范. 大气动力学的新进展. 兰州:兰州大学出版社,1990. 37～51

2 叶笃正,陶诗言,李麦村. 在六月和十月大气环流的突变现象. 气象学报,1958,29(3):249～263

3 Charney J G, Devore J G. Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking. J Atmos Sci, 1979,36:1 205～1 216

4 Charney J G, Straus D M. Form-drag instability, multiple equilibria and propagating planetary waves in baroclinic, orographically forced, planetary waves system. J Atmos Sci, 1980,37:1 157～1 176

5 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础(第一卷). 北京:科学出版社,1979. 58～59

万方数据