第56卷 第2期　　　　气 象 学 报　　　　Vol. 56, No. 2
1998年4月　　　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　　　Apr., 1998

湿大气方程组解的渐近性质*

李建平**　　丑纪范

(兰州大学大气科学系, 兰州, 730000)

摘　　要

研究无穷维 Hilbert 空间中, 湿大气运动系统解的长期行为, 在导得了湿大气运动方程是 Hilbert 空间中一个非常特殊的算子方程之后, 利用算子的性质讨论了全局吸收集和全局吸引子的存在性, 揭示出系统解的渐近行为表现在吸引子的结构上及系统向非绝热加热的非线性适应过程。最后指出了几个简化方程组与原方程组在解的长期行为上的根本不同, 从而给出长期天气或气候研究中简化方程组必须遵循的原则。

关键词: 湿大气方程组, 算子方程, 全局吸引子, 非绝热加热, 渐近行为。

1　引　言

长期数值天气预报, 不同于短期数值预报, 也不同于中期数值预报。一个长期天气数值预报的模式应当能够抓住实际大气过程的主要特征和各个主要方面, 对非主要方面应作必要的省略和近似[1]。而长期天气的主要特征及大气方程简化的原则是什么呢?这就必须要了解长期天气模式应有的特征, 需要进行基础理论研究。丑纪范、Wang, Lions 等[2—9]对此做了大量的研究工作。这些研究表明, 不论初始状态如何, 系统的状态都将随着时间的增长, 演变到全局吸引子的点集之中。这就揭示出有强迫和耗散的系统向外源的非线性适应过程。

上述工作都是针对干空气而进行的。而大气中含有水汽, 水汽相变所造成的潜热释放是大气获得热量的主要方式之一。因此, 完整的大气应是考虑了水汽变化的湿大气。对于湿大气运动, 系统解的长期行为是怎样的?具有哪些主要特征呢?其简化应遵循什么原则?文中主要讨论这些问题。

2　基本方程及其算子形式

球坐标系 (r, θ, λ, t) 下, 湿大气运动方程为:

$$\frac{dV_\lambda}{dt} + F_1 V_\theta + F_2 V_r + \frac{1}{\rho r \sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda} - N_\lambda - F_\lambda = 0 \tag{1}$$

* 初稿时间: 1996年6月27日; 修改稿时间: 1997年1月15日。
资助课题: 国家基础性研究重大关键项目“气候动力学和气候预测理论的研究。

** 现在通讯地址: 中科院大气物理研究所LASG, 北京, 100080。

$$\frac{\mathrm{d}V_\theta}{\mathrm{d}t} - F_1 V_\lambda + \frac{V_\theta}{r} V_r + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} - N_\theta - F_\theta = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}V_r}{\mathrm{d}t} - F_2 V_\lambda - \frac{V_\theta}{r} V_\theta + g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - N_r - F_r = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 V_r}{\partial r}\right) = 0 \tag{4}$$

$$c_V\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{p}\right) = Q \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = S \tag{6}$$

$$p = \rho R(1 + Cq)T \tag{7}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda$$

$$\Lambda = \frac{V_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + V_r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$F_1 = 2\Omega\cos\theta + \frac{V_r}{r}\mathrm{ctg}\theta$$

$$F_2 = 2\Omega\sin\theta + \frac{V_r}{r}$$

$$N_r = \frac{\nu}{3}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 V_r}{\partial r}\right) + \nu\Delta V_\lambda$$

$$N_\theta = \frac{\nu}{3}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 V_r}{\partial r}\right) + \nu\Delta V_\theta$$

$$N_r = \frac{\nu}{3}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 V_r}{\partial r}\right) + \nu\Delta V_r$$

$$F_\lambda = \frac{1}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{k_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{k_\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial V_\lambda}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho r^2}\frac{\partial}{\partial r}k_r r^2\frac{\partial V_\lambda}{\partial r}$$

$$F_\theta = \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{k_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\lambda} + \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{k_\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho r^2}\frac{\partial}{\partial r}k_r r^2\frac{\partial V_\theta}{\partial r}$$

$$F_r = \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{k_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\lambda} + \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{k_\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho r^2}\frac{\partial}{\partial r}k_r r^2\frac{\partial V_r}{\partial r}$$

$$C = (R_v - R)/R$$

$\nu = \mu/\rho$ 为运动的分子粘性系数，μ 为动力的粘性系数，k_λ，k_θ，k_r 分别为水平和垂直方向上的湍流粘性系数，R，R_v 分别为干空气、水汽的比气体常数。单位质量空气的非绝热加热率

Q 分为4部分:

$$Q = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)/\rho$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 分别表示由辐射、水气相变、分子热扩散、湍流热交换所造成的热流入量

$$\epsilon_2 = -\delta L W$$

L 为相变潜热, W 为水汽相变所造成的水汽流入量, δ 为判别函数, 它是一诊断方程 $\delta = \delta(V_\lambda, V_\theta, V_r, \rho, T, q)$,

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{有水汽相变} \\ 0, & \text{无水汽相变} \end{cases}$$

单位质量水汽流入量 S 分为3部分:

$$S = (S_1 + S_2 + S_3)/\rho$$

S_1, S_2, S_3 分别表示由相变、分子扩散、湍流输送所造成的水流流入量, $S = \delta W$。

方程(1)—(7)的求解区域为 $\Omega = S^2 \times (r_s, r_\infty)$, 这里 $r_s = r_s(\lambda, \theta)$ 为经度是 λ, 余纬为 θ 的地球表面至地心的距离, r_∞ 为任意大正数, $0 < r_s < r_\infty < \infty$。边界条件可取为:

在地表面 $r = r_s$ 上,

$$(V_\lambda, V_\theta, V_r) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_s (T - T_s) \tag{9}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \beta_s (q - q_s) \tag{10}$$

若考虑地形作用, 则式(8)可改为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}(V_\lambda, V_\theta) = C_{DK}(V_a, V_\theta) \\ V_r = \mathrm{V}_{hs} \cdot \nabla_h r_s = \dfrac{V_r}{r_s \sin\theta} \dfrac{\partial r_s}{\partial \lambda} + \dfrac{V_\theta}{r_s} \dfrac{\partial r_s}{\partial \theta} \end{cases} \tag{8'}$$

在本文中用式(8)或用(8′)所得结论是一致的。式(9)、(10)中 $T_s = T_s(\lambda, \theta, t)$, $q_s = q_s(\lambda, \theta, t)$, 分别为地表面上的温度、湿度, α_s, β_s 为与湍流扩散率有关的参数, 式(8′)中 $C_{DK} = C_{DK}(\theta, \lambda)$ 是与拖曳系数(取决于地面粗糙度、稳定度等)和湍流涡动有关的系数, α_s, β_s, $C_{DK} \in L^\infty(S^2) \cap R_+$。

在大气层顶 $r = r_\infty$ 上, 有

$$\begin{cases} \rho(V_\lambda^2, V_\theta^2, V_r^2, \Phi, T, q) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(V_\lambda, V_\theta) = 0, \qquad V_r = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(T, q) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\Phi = gr$。

初始条件为

$$(V_\lambda, V_\theta, V_r, \rho, T, q)\big|_{t=0} = (V_\lambda^0, V_\theta^0, V_r^0, \rho^0, T^0, q^0) \tag{12}$$

令 $\varphi = (\tilde{V}_\lambda, \tilde{V}_\theta, \tilde{V}_r, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{q})'$，其中符号 $'$ 表示转置，$\tilde{V}_\lambda = \rho^* V_\lambda^*$，$\tilde{V}_\theta = \rho^* V_\theta^*$，$\tilde{V}_r = \rho^* V_r^*$，$\tilde{\rho} = \sqrt{\Phi}\rho^*$，$\tilde{T} = \rho^* T^*$，$\tilde{q} = \rho^* q^*$，$V_\lambda^* = V_\lambda/\sqrt{2}$，$V_\theta^* = V_\theta/\sqrt{2}$，$V_r^* = V_r/\sqrt{2}$，$\rho^* = \sqrt{\rho}$，$T^* = \sqrt{c_V T}$，$q^* = \sqrt{L}\,q$。则方程(1)—(7)可化为等价的算子方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + N(\varphi)\varphi + L(\varphi)\varphi = \zeta(\varphi) \tag{13}$$

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0 \tag{14}$$

其中

$$N(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & F_1 & F_2 & 0 & \frac{1}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}G & 0 \\ -F_1 & \mathbf{L} & \frac{V_\theta}{r} & 0 & \frac{1}{\rho^* r}\frac{\partial}{\partial\theta}G & 0 \\ -F_2 & -\frac{V_\theta}{r} & \mathbf{L} & \frac{g}{2\sqrt{\Phi}} & \frac{1}{\rho^*}\frac{\partial}{\partial r}G & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{2\sqrt{\Phi}} & \mathbf{L} & 0 & 0 \\ \frac{G}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*} & \frac{G}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{r^2}{\rho^*} & \frac{G}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{\rho^*} & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} \end{pmatrix}$$

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{3\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}l_1 - \mu l_4 - l & -\frac{\mu}{3\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}l_2 & -\frac{\mu}{3\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}l_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{3\rho^* r}\frac{\partial}{\partial\theta}l_1 & -\frac{\mu}{3\rho^* r}\frac{\partial}{\partial\theta}l_2 - \mu l_4 - l & -\frac{\mu}{3\rho^* r}\frac{\partial}{\partial\theta}l_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{3\rho^*}\frac{\partial}{\partial r}l_1 & -\frac{\mu}{3\rho^*}\frac{\partial}{\partial r}l_2 & -\frac{\mu}{3\rho^*}\frac{\partial}{\partial r}l_3 - \mu l_4 - l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_5 - l_5' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_6 - l_6' \end{pmatrix}$$

$$\xi(\varphi) = (0, 0, 0, 0, (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \hat{C}\alpha_s T_s)/2\tilde{T}, (\delta L W + \hat{R}\beta_s q_s)/2\tilde{q})'$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\Pi + \Lambda)$$

$$\Pi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}V_\lambda + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\theta\sin\theta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2V_r$$

$$G = R(1+Cq)\tilde{T}/\sqrt{2}\,c_V$$

$$l = \frac{1}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{k_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{k_\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{\rho^* r^2}\frac{\partial}{\partial r}k_r r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*}$$

$$l_1 = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*}$$

$$l_2 = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho^*}$$

$$l_3 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{\rho^*}$$

$$l_4 = \frac{1}{\rho^*}\Delta\frac{1}{\rho^*}$$

$$l_5 = \frac{1}{c_V\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{k_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{c_V\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{k_\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho^*}$$

$$+ \frac{1}{c_V\rho^* r^2}\frac{\partial}{\partial r}k_r r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*} - c_V\alpha_s T_s/2\tilde{T}^2$$

$$l_5' = \frac{1}{\tilde{T}^2}\left[\frac{K_\lambda}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{K_\theta}{r^2}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta}\right)^2 + K_r\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{K_\lambda}{c_V\rho^* r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\frac{1}{\rho^*} + \frac{K_\theta}{c_V\rho^* r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho^*}$$

$$+ \frac{K_r}{c_V\rho^* r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*} - C_K\alpha_s T_s/2\tilde{T}^2$$

$$l_6 = \frac{1}{L\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\eta_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{L\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\eta_\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho^*}$$

$$+ \frac{1}{L\rho^* r^2}\frac{\partial}{\partial r}\eta_r r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*} - R_\eta\beta_s T_s/2\tilde{q}^2$$

$$l_6' = \frac{1}{\tilde{q}^2}\left[\frac{\gamma_\lambda}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{\gamma_\theta}{r^2}\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\theta}\right)^2 + \gamma_r\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$\frac{\gamma_\lambda}{Lq^* r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\frac{1}{\rho^*} + \frac{\gamma_\theta}{Lq^* r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho^*}$$

$$+ \frac{\gamma_r}{Lq^* r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*} - R_\gamma\beta_s q_s/2\tilde{q}^2$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\hat{C} = C_K + C_{\mathbf{K}}$$

$$C_K = K_{r_s} r_s^2 / C_r$$

$$C_{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_r r_s^2 / C_r$$

$$\hat{R} = R_\eta + R_\gamma$$

$$R_\eta = \eta_{r_s} r_s^2 / C_r$$

$$R_{\mathbf{K}} = \gamma_r r_s^2 / C_r$$

这里 $C_r = \int_s^\infty r^2 \mathrm{d} r \in R^+$, K_λ, K_θ, K_r 分别为水平和垂直方向的湍流导热系数, $\mathbf{K}_\lambda, \mathbf{K}_\theta, \mathbf{K}_r$ 分别为水平和垂直方向的分子热扩散系数, $\eta_\lambda, \eta_\theta, \eta_r$ 分别为水平和垂直方向上水汽的湍流扩散系数, $\gamma_\lambda, \gamma_\theta, \gamma_r$ 分别为水平和垂直方向上水汽的分子扩散系数。设方程组(1)—(7)对动力分析是适合的。

3 算子的特性及物理意义

令 $H_0(\Omega)$ 为下述范数下的完备化空间

$$\|\varphi\|_0 = (\varphi, \varphi)^{1/2} \tag{15}$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_\Omega \varphi_1' \varphi_2 \mathrm{d}\Omega$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_s^\infty \varphi_1' \varphi_2 r^2 \sin\theta \mathrm{d} r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\lambda \tag{16}$$

$\forall \varphi = (\tilde{V}_\lambda, \tilde{V}_\theta, \tilde{V}_r, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{q})'$。显然, $H_0(\Omega)$ 为一 Hilbert 空间。令 $N^*(\varphi)$、$L^*(\varphi)$ 为 $N(\varphi)$、$L(\varphi)$ 的伴随算子, 则有

性质 1

$$N(\varphi) = -N^*(\varphi) \tag{17}$$

$$L(\varphi) = L^*(\varphi) \tag{18}$$

称 $L(\varphi)$ 为自伴算子, $N(\varphi)$ 为反伴算子。

性质 2 $L(\varphi)$ 是对称的, $N(\varphi)$ 是反对称的。

即

$$(\varphi_1, L(\varphi)\varphi_2) = (L(\varphi)\varphi_1, \varphi_2) \tag{19}$$

$$(\varphi_1, N(\varphi)\varphi_2) = -(N(\varphi)\varphi_1, \varphi_2) \tag{20}$$

$\forall \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in H_0(\Omega)$。

性质 3

$$(\varphi, L(\varphi)\varphi) \geq 0 \tag{21}$$

$$(\varphi, N(\varphi_1)\varphi) = 0 \tag{22}$$

$\forall \varphi, \varphi_1 \in H_0(\Omega)$, 式(21)中等号只在 $\|\varphi\|_0 = 0$ 时成立。

性质 4 $$(\varphi, L(\varphi)\varphi) = (\Psi, \tilde{L}\Psi) \tag{23}$$

其中

$$\Psi = (V_\lambda^*, V_\theta^*, V_r^*, \rho^*, T^*, q^*)'$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{3r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} - \mu\Delta - l' & -\frac{\mu}{3r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta & -\frac{\mu}{3r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{3r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} & -\frac{\mu}{3r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta - \mu\Delta - l' & -\frac{\mu}{3r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} & -\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta & -\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 - \mu\Delta - l' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{l}_5 - \tilde{l}_5' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{l}_6 - \tilde{l}_6' \end{pmatrix}$$

$$l' = \rho^* l \rho^*$$

$$\tilde{l}_5 = \rho^* l_5 \rho^*$$

$$\tilde{l}_5' = \rho^* l_5' \rho^*$$

$$\tilde{l}_6 = \rho^* l_6 \rho^*$$

$$\tilde{l}_6' = \rho^* l_6' \rho^*$$

令 $\|\cdot\|$ **表示** $L^2(\Omega)$ **中范数, 则**

$$\|\varphi\|_0 = (\|\tilde{V}_\lambda\|^2 + \|\tilde{V}_\theta\|^2 + \|\tilde{V}_r\|^2 + \|\tilde{\rho}\|^2 + \|\tilde{T}\|^2 + \|\tilde{q}\|^2)^{1/2} \tag{24}$$

在 $H_0(\Omega)$ **中, 可赋以如下等价范数**

$$\|\varphi\|_0 = (\|\tilde{V}_\lambda\|^2 + \|\tilde{V}_\theta\|^2 + \|\tilde{V}_r\|^2 + \|\rho^*\|^2 + \|\tilde{T}\|^2 + \|\tilde{q}\|^2)^{1/2} \tag{25}$$

令 $H_1(\Omega)$ **为下述范数下的完备化空间**

$$\begin{aligned}\|\Psi\|_1 = (&\|V_\lambda^*\|_{H^1}^2 + \|V_\theta^*\|_{H^1}^2 + \|V_r^*\|_{H^1} \\ &+ \|\rho^*\|^2 + \|T^*\|_{H^1}^2 + \|q^*\|_{H^1}^2)^{1/2}\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\Psi = (V_\lambda^*, V_\theta^*, V_r^*, \rho^*, T^*, q^*)'$, $\|\cdot\|_{H^1}$ **取** $H^1(\Omega)$ **中范数,** $H^1(\Omega)$ **是标准的** Sobolev **空间。令**

$$|\Psi|_1 = (\|V_\lambda^*\|_{H^1}^2 + \|V_\theta^*\|_{H^1}^2 + \|V_r^*\|_{H^1}^2 + \|T^*\|_{H^1}^2 + \|q^*\|_{H^1}^2)^{1/2} \tag{27}$$

由质量守恒定律(即方程(4)沿 Ω 积分)

$$\int_\Omega \rho \mathrm{d}\Omega = M_\rho = \text{常数} \tag{28}$$

有

引理1 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\| \varphi \|_0^2 \leq C \| \Psi \|_0^2 \tag{29}$$

$$|\varphi|_0^2 \leq C |\Psi|_0^2 \tag{30}$$

$\forall \varphi = (\tilde{V}_\lambda, \tilde{V}_\theta, \tilde{V}_r, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{q})', \Psi = (V_\lambda^*, V_\theta^*, V_r^*, \rho^*, T^*, q^*)' \in H_0(\Omega)$。

引理2 存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$C_1 |\Psi|_1^2 \leq (\tilde{L}\Psi, \Psi) \tag{31}$$

$\forall \Psi = (V_\lambda^*, V_\theta^*, V_r^*, \rho^*, T^*, q^*)' \in H_1(\Omega)$。

算子 $N(\varphi)$ 是一个非线性算子, 系统固有的非线性过程蕴含其中。根据 $N(\varphi)$ 的具体构成, 算子 $N(\varphi)$ 代表了系统能量转换的可逆(绝热)过程以及对能量形式不发生转换的过程。平流过程, 地转偏向力及地球曲率效应等是对能量形式不起作用的过程。平流过程处于其对角线上, 它只能改变量在空间分布上的变化, 从全球范围上说, 它对总能量没有贡献。地转偏向力和地球曲率效用不做功, 对能量没有影响。气压梯度力和重力作用是系统三种能量即动能 K, 位能 Φ 和内能 e 之间的可逆(绝热)转换过程。算子 $N(\varphi)$ 的反伴性表明, 若有一种可逆转换作用使得一种能量向另一种能量转换, 那么必会有另一种可逆转换作用使得与前述作用在数量上相等而转换方向相反。总之, 算子 $N(\varphi)$ 所概括的上述过程, 它们对系统能量之间的转换率的总和为零, 因而 $N(\varphi)$ 对总能量没有贡献。算子 $N(\varphi)$ 的反伴性是这一物理本质的深刻体现。

算子 $N(\varphi)$ 代表系统摩擦耗散作用, 是系统能量转换的不可逆(非绝热)过程。其自伴非负性表明其总是耗散系统的能量, 使系统能量的"品质"降低。

4 解的渐近行为

首先有

定理1 算子方程(13), (14)的解 φ 满足

$$\| \varphi(t) \|_0^2 + 2C_1 \int |\tilde{K}\varphi(t)|_1 \mathrm{d}t$$

$$\leq \| \varphi_0 \|_0^2 + 2\int (\xi(\varphi, t), \varphi(t))\mathrm{d}t, \qquad t \in [0, T] \tag{32}$$

其中 C_1 **为式**(31) **给出,** $\tilde{K} = \mathrm{diag}(1/\rho^*, 1/\rho^*, 1/\rho^*, 1/\sqrt{\Phi}, 1/\rho^*, 1/\rho^*)$。

进一步, 由引理1, 2 **及** Gronwall **不等式有**

定理2 算子方程(13)、(14)的解 φ 满足

$$\| \varphi \|_0^2 \leq \{ \| \varphi_0 \|_0^2 + 2\int e^{\tilde{C}t}(C_m + |\xi(t)|)\mathrm{d}t\} e^{-\tilde{C}t} \tag{33}$$

$t \in [0, T], \tilde{C}, C_m$ **为大于**0**的常数,** $|\xi(t)| = \int_\Omega \{ |\epsilon_1(t)| + |\hat{C}\alpha_s T_s(t)| + |\hat{R}\beta_s q_s(t)| \} \mathrm{d}\Omega$。

在实际中, 外源强迫是有界的, 即可有假定

$$0 < \left|\xi(t)\right| \leq M < \infty \tag{34}$$

于是有

定理 3 在式(34)的假定下, 方程(13)、(14)的解满足

(1) 若 $\varphi_0 \in B_k$, 则对 $\forall t \geq 0, \varphi(t) \in B_k$;

(2) 若 $\varphi_0 \notin B_k$, 则对 $\forall t \geq \tau, \varphi(t) \in B_k$,

这里

$$B_K = \{\varphi = (\tilde{V}_\lambda, \tilde{V}_\theta, \tilde{V}_r, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{q})' \in H_0 \,|\, \|\varphi\|_0^2 \leq K\} \tag{35}$$

$$\tau = \frac{1}{\tilde{C}} \ln \frac{\|\varphi_0\|_0^2 - M_1}{K - M_1} \tag{36}$$

$$K > M_1 \tag{37}$$

$$M_1 = \frac{2(C_m + M)}{\tilde{C}} \tag{38}$$

$\tilde{C}, C_m$ 为式(33)所给。

此定理表明, 算子方程(13)、(14)存在全局吸收集 B_K, B_K 外的点所表示的状态只有暂时意义, 系统的长期行为只取决于有界球体 B_k。

方程(13)、(14)定义了一个半群算子 $S(t): H_0 \rightarrow H_0$, 使得 $S(t)\varphi_0 = \varphi(t)$, 定义

$$S(t)R = \{S(t)\varphi_0 \,|\, \forall \varphi_0 \in R \subset H_0\} \tag{39}$$

令

$$A = \bigcap_{S \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t) B_K} \tag{40}$$

(其中闭包在 H_0 中取), 则有

定理 4 A 满足:

(1) A 是 H_0 中的有界集;

(2) A 是半群 $S(t)$ 的泛函不变集;

(3) A 是一致吸引 H_0 中的任一有界集;

(4) A 是半群 $S(t)$ 的全局吸引子, 也是 H_0 中的最大吸引子。

定理 4 表明, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统将趋于全局吸引子 A, 即湿大气运动方程组解的渐近行为表现在全局吸引子 A 的结构上。吸引子 A 反映了系统的终态。这个终态取决于非绝热加热的变动情况。从物理上讲, 就是系统具有向非绝热加热的非线性适应过程。

5 几个简化模式的特征

由于原始大气方程组的复杂性, 因此在研究时经常要对它进行简化。比较有代表性的简化是: (1) 把它当作是绝热无摩擦(非线性)系统, 即方程(13)变为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + N(\varphi)\varphi = 0 \tag{41}$$

(2) 把它当作是强迫耗散的线性系统, 即方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + N(\overline{\varphi})\varphi + L(\overline{\varphi})\varphi = \xi(\overline{\varphi}) \tag{42}$$

(其中 $\overline{\varphi}$已知且与 φ无关; $\overline{\varphi}$可看成是 φ的某种平均, 线性化小扰动法即是如此)。那么, 上述简化方程与原方程在解的长期行为上有什么本质不同呢? 下面就讨论这个问题。

定理 5 方程(41)有能量守恒性质。

对(41)两边和 φ作 H 内积, 立即可得

$$\frac{d}{dt}\|\varphi\|_0^2 = 0 \tag{43}$$

即

$$\|\varphi\|_0^2 = \int_\Omega \left(\frac{V_\lambda^2 + V_\theta^2 + V_r^2}{2} + \varphi + c_V T + L q\right)\rho d\Omega$$

$$= \|\varphi_0\|_0^2 = 常数 \tag{44}$$

这表明, 把大气看作是绝热无耗散的保守系统有能量守恒性质, 初值的影响不衰减并延续至无穷。初值一旦确定, 系统将在同一等能量面上运动, 而不存在吸引子。同时, 根据Liouville 定理, 保守系统的相空间体积在运动过程中是保持不变的。相反, 耗散系统的相体积则有收缩性, 并使轨道趋向于全局吸引子。这些都是绝热无耗散系统与强迫耗散的非线性系统的根本区别。

定理 6 初边值问题(43)的解是唯一的, 其定常方程有唯一定常解 φ_∞。

定理 7 方程(43)的解 φ满足

$$|\varphi|_0^2 \leq \{|\varphi_0|_0^2 + \frac{1}{C^*}\int e^{\tilde{C}t}(C_m + \|\xi(\overline{\varphi})\|_0^2)dt\}e^{-\tilde{C}t}, \quad t\in[0,T] \tag{45}$$

且

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t) = \varphi_\infty \tag{46}$$

这里 φ_∞ 为式(46) 的定常解, $C^*, \tilde{C}, C_m$ 为大于 0 的常数。

证明(只证式(46)):

令 $\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi_\infty$, 则

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + N(\overline{\varphi})\varphi + L(\overline{\varphi})\varphi = 0 \tag{47}$$

于是

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|_0^2 + (L(\overline{\varphi})\varphi, \varphi) = 0 \tag{48}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}|\varphi|_0^2 + C|\varphi|_0^2 \leq 0 \tag{49}$$

其中 C 为正常数。利用 Gronwall 不等式, 有

$$|\varphi|_0^2 \leq |\varphi(0)|_0^2 e^{-ct} \tag{50}$$

其中 $\varphi(0) = \Psi(0) - \Psi_\infty$。式(50)蕴含

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi|_0^2 = 0 \tag{51}$$

证毕。

由以上结果知, 强迫耗散线性系统只有唯一的定常解, 初值影响随时间增长衰减至零, 存在唯一的渐近态且与初值无关, 即系统解的渐近行为表现在趋于定常解的结构上, 不会出现浑沌现象。

6 结果讨论

上述研究表明, 湿大气运动方程组可以化成 Hilbert 空间中一个相当特殊的算子方程, 其中的算子具有很好的性质。根据算子方程和算子的特性, 在外源强迫有界的假定下, 证明了系统解的长期演变将趋于全局吸引子 $\mathcal{A}$, 也即大气的长期演变实际是处于吸引子状态。

在研究长期天气或气候运动时, 不可避免地要对方程组(1)～(7)进行简化。根据本的结论得知, 强迫耗散的非线性系统与绝热无摩擦系统及强迫耗散的线性系统在解的渐近行为上有根本的差别。因此, 简化方程组必须遵循如下原则:

(1) 算子的性质应当保持不变;

(2) 系统向非绝热加热的非线性适应;

(3) 初始场作用具有衰减性, 系统的长期运动取决于能量耗散和能量补充。

这样, 简化后的系统仍可以保持系统长期变化的主要物理过程和应具有的演变特征, 从而能够得到成功的结果。

参考文献

1 丑纪范. 长期数值天气预报. 北京:气象出版社, 1986. 51～95

2 丑纪范. 大气动力学方程组的全局分析. 北京气象学院学报, 1995, (1):1～12

3 汪守宏, 黄建平, 丑纪范. 大尺度大气运动方程组解的一些性质——定常外源强迫下的非线性适应. 中国科学, B辑, 1989, (3):308～336

4 Lions J L, Temam R, Wang S. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. Nonlinearity, 1992, 5:237～288

5 Wang S. Attractors for the 3D baroclinic quasi-geostrophic equations of large scale atmosphere. J Math Anal Appl, 1992, 165:266～283

6 Lions J L, Temam R, Wang S. Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean models (CAO Ⅲ). J Math Pures Appl, 1995, 74:105～163

7 李建平, 丑纪范. 非定常外源强迫下大尺度大气方程组解的性质. 科学通报, 1995, 40(13):1207～1209

8 李建平, 丑纪范. 大气吸引子的存在性. 中国科学, D辑, 1997, 27(1):89～96

9 Li Jianping, Chou Jifan. The effects of external forcing, dissipation and nonlinearity on the solutions of atmospheric equations. Acta Meteor Sinica, 1997, 11(1):57～65

10 丑纪范. 初始场作用的衰减与算子的特性. 气象学报, 1983, 41(4):385～392

11 李开泰,马逸生. 数理方程HILBERT空间方法(下). 西安:西安交通大学出版社,1992. 267～400

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE MOIST ATMOSPHERIC EQUATIONS

Li Jianping Chou Jifan

(*Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou*, 730000)

Abstract

The asymptotic behavior of solutions of the moist atmospheric equatins is studied in the infinite dimensional Hilbert space. After deduced that the moist atmospheric equations in Hilbert space is a very special operator equation, the existence theorems of the gloal absorbing set and the global attractor are obtained by use of the properties of operators, and the property that the asymptotic behavior of solutions shows itself on the structure of attractor and the nonlinear adjustment to the diabatic heating are revealed. Then the essential differences between some simplified equations and the primitive equations are pointed out, and the reduced principle of atmospheric equations that must be complied with in the studies of long-range weather and climate are given.

Key words: Moist atmospheric equations, Operator equation, Global attractor, Diabatic heating, Asymptotic behavior.