

丁瑞强, 李建平. 初始误差和参数误差对混沌系统可预报性影响的比较. 地球物理学报, 2008, 51(4):1007~1012  
Ding R Q, Li J P. Comparison of the influences of initial error and model parameter error on the predictability of numerical forecast. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2008, 51(4):1007~1012

## 初始误差和参数误差对混沌系统 可预报性影响的比较

丁瑞强, 李建平

中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

**摘 要** 利用非线性误差增长理论, 以 Lorenz 系统为例比较研究了初始误差和参数误差对混沌系统可预报性的影响. 结果表明: 在初始误差和参数误差单独存在时, 系统的可预报期限随误差大小的变化规律基本上相同; 对于相同的误差大小, 初始误差和参数误差对系统可预报期限的影响几乎相同, 这一结果基本上不随参数范围的变化而变化. 当初始误差和参数误差同时存在时, 两者对可预报期限影响所起的作用大小主要取决于初始误差和参数误差的相对大小. 当初始误差远大于参数误差时, Lorenz 系统的可预报期限主要由初始误差决定, 可以不用考虑参数误差对预报模式可预报性的影响; 反之, 当参数误差远大于初始误差时, Lorenz 系统的可预报期限主要由参数误差决定; 当初始误差和参数误差大小相当时, 两者都对系统的可预报期限起重要作用. 在后两种情况下, 在考虑初始误差对可预报性影响的同时还必须考虑参数误差的作用. 这提醒我们在作实际数值天气预报的时候, 不仅要重视初值的确定, 也要重视数值模式控制参数的确定.

**关键词** 数值天气预报, 可预报性, 初始误差, 参数误差, Lorenz 系统

**文章编号** 0001-5733(2008)04-1007-06

**中图分类号** P456

**收稿日期** 2007-10-18, 2008-02-20 收修定稿

### Comparison of the influences of initial error and model parameter error on the predictability of numerical forecast

DING Rui-Qiang, LI Jian-Ping

*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*

**Abstract** Based on the nonlinear error growth dynamics introduced by the authors recently, the influences of initial error and model parameter error on the Lorenz system's predictability are studied. The major results are summarized as follows: (i) When there is initial error only or model parameter error only in the Lorenz system, the error growth and predictability limit are comparable between two kinds of error problems. This result holds basically for the wide range of parameter space of Lorenz system. (ii) When initial error and model parameter error coexist in the Lorenz system, the influences of initial error and model parameter error on the predictability of Lorenz system depend on their relative sizes. When the size of initial error is far greater than that of model parameter error, the predictability limit of Lorenz system is mainly determined by initial error. On the contrary, when the size of model parameter error is far greater than that of initial error, the predictability limit of Lorenz system is mainly determined by model parameter error. When the size of initial error is close to that of model parameter error, they both

**基金项目** 国家“973”项目(2006CB403600)和国家自然科学基金项目(40325015, 40675046)资助.

**作者简介** 丁瑞强, 男, 1977 年生, 博士, 助理研究员, 主要从事非线性大气动力学与可预报性研究. E-mail: drq@mail.iap.ac.cn

contribute to the predictability limit of Lorenz system. These results indicate that when numerical weather forecast is made, we should pay great attention to the determination of model parameter, not just the determination of initial condition.

**Keywords** Numerical weather forecast, Predictability, Initial error, Parameter error, Lorenz system

## 1 引言

Lorenz<sup>[1]</sup>把初值问题看成第一类可预报性,主要强调初始状态不确定性对预报的影响.利用预报模式研究初始误差对可预报性影响已做了大量的工作<sup>[2~6]</sup>,这些工作的一个共同点就是假定预报模式是完全正确的,预报误差完全源自初始误差,不存在模式误差,即模式方程和方程的控制参数都是完全准确的.然而,在实际情形中,即使模式方程完全正确,要作出数值预报,除了要确定初始状态之外,还要确定模式方程的一些控制参数(如动力系统中各物理项的系数等).这些系数绝大多数需要通过观测实验来确定,也给预报带来了不确定性因素,从而提出了参数误差的可预报性问题.

Chu<sup>[7]</sup>研究了 Lorenz 系统中参数误差对可预报性的影响,并与初始误差对可预报性的影响进行了比较,研究结果表明,两类误差导致系统误差增长的幅度和持续时间大体相当,因此正确地确定预报模式的参数对于数值天气预报是十分重要的.卞建春等<sup>[8]</sup>也利用 Lorenz 系统研究了参数误差的可预报性问题,与 Chu<sup>[7]</sup>研究不同的是,除了单独研究初始误差和参数误差对可预报性的影响外,他们还研究了当初始误差和参数误差同时存在时 Lorenz 系统的误差增长情况,认为对于既存在初值(观测)误差(其存在性是不可避免的),又存在控制参数(外部条件)误差的可预报性问题而言,不需要考虑控制参数的微小变化对预报的影响.这些研究对于认识初始误差和参数误差在可预报性问题研究中的相对重要性是很有意义的.然而,过去的研究还存在一些缺陷和不足,主要表现在:只针对单个初值进行研究,反映的只是在相空间中的局部区域系统行为对初始误差和参数误差的响应,而对于相空间全局即多个初值的系统平均来说模式行为如何对初始误差和参数误差响应却没有涉及;以往的研究都是在给定一定大小的初始误差和参数误差的情况下,定性地判断可预报性的大小,不能定量地比较两类误差导致的可预报性的大小.

为了克服线性误差增长理论在可预报性研究中的局限性,Ding 和 Li<sup>[9]</sup>对非线性系统的误差发展方程不作线性化近似,直接用原始的误差发展方程来研究初始误差的发展,在此基础上引入了非线性局部 Lyapunov 指数的概念,发展了非线性误差增长理论.与以前的线性误差增长理论相比较,非线性误差增长理论最大的优越性就是可以定量地估计混沌系统的可预报期限<sup>[10~12]</sup>.本文利用非线性误差增长理论来比较研究初始误差和参数误差的可预报性问题,针对以往工作的局限性,同样也利用 Lorenz 系统进行数值实验来着重研究以下几个问题:在固定参数条件下,比较研究可预报期限随初始误差和参数误差大小的变化;在固定初始误差和参数误差的情况下,比较研究可预报期限随参数范围的变化;在初始误差和参数误差都存在的情况下,两者的非线性相互作用问题等.

## 2 非线性局部 Lyapunov 指数及混沌系统可预报期限的确定

对于一个  $n$  维非线性动力系统,如果对其误差演化方程不作任何近似,保留所有的非线性项,误差演化方程的解可以从  $t=t_0$  到  $t_0+\tau$  进行数值积分,我们可得到:

$$\delta(t_0 + \tau) = \eta(x(t_0), \delta(t_0), \tau)\delta(t_0), \quad (1)$$

其中  $\eta(x(t_0), \delta(t_0), \tau)$  为非线性误差传播算子,  $x(t_0)$  为初始状态,  $\delta(t_0)$  为初始误差,  $\tau$  为演化时间;由(1)式可以定义非线性局部 Lyapunov 指数:

$$\lambda(x(t_0), \delta(t_0), \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|\delta(t_0 + \tau)\|}{\|\delta(t_0)\|}, \quad (2)$$

这里  $\lambda(x(t_0), \delta(t_0), \tau)$  不仅依赖于相空间中参考轨道的初始状态  $x(t_0)$  和演化时间  $\tau$ , 还与初始误差  $\delta(t_0)$  有关, 而以前定义的局部或有限时间 Lyapunov 指数<sup>[13~15]</sup>是建立在线性误差增长方程基础上的, 仅依赖于初始状态  $x(t_0)$  和演化时间  $\tau$ , 与初始误差  $\delta(t_0)$  无关, 因此两者完全不同. 下面为了方便, 将误差向量  $\delta(t)$  的大小表示为  $\delta(t) = \|\delta(t)\|$ . 如果要从整体上对非线性系统的动力特性进行研究,

需要引入整体系统平均的非线性局部 Lyapunov 指数:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\delta(t_0), \tau) &= \langle \lambda(x(t_0), \delta(t_0), \tau) \rangle_N \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta_i(t_0 + \tau)}{\delta_i(t_0)}, \quad (3) \end{aligned}$$

其中  $\langle \cdot \rangle_N$  表示  $N (N \rightarrow \infty)$  个样本的集合平均; 误差平均相对增长  $\bar{E}(\delta(t_0), \tau)$  可以通过平均非线性局部 Lyapunov 指数  $\bar{\lambda}(\delta(t_0), \tau)$  获得:

$$\bar{E}(\delta(t_0), \tau) = \exp(\bar{\lambda}(\delta(t_0), \tau)\tau). \quad (4)$$

由(2)、(3)、(4)式可得

$$\bar{E}(\delta(t_0), \tau) = \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\delta_i(t_0 + \tau)}{\delta_i(t_0)}\right). \quad (5)$$

对于相同大小的初始误差  $\delta(t_0)$ , 我们有

$$\bar{E}(\delta(t_0), \tau) = \frac{\left(\prod_{i=1}^N \delta_i(t_0 + \tau)\right)^{\frac{1}{N}}}{\delta(t_0)}. \quad (6)$$

对于一个混沌系统, 随着  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\delta_1(t_0 + \tau), \delta_2(t_0 + \tau), \dots, \delta_N(t_0 + \tau)$  相互独立, 并且收敛到同一分布, 利用文献[10]提出的定理, 可得

$$\bar{E}(\delta(t_0), \tau) \xrightarrow{P} c \quad (N \rightarrow \infty), \quad (7)$$

其中  $\xrightarrow{P}$  表示依概率收敛于  $c$ , 看作是  $\bar{E}(\delta(t_0), \tau)$  的理论饱和值. 误差增长达到饱和, 就意味着系统的初始信息全部丢失, 预测失去意义, 因此利用这个饱和值, 混沌系统的可预报期限  $T_p$  能被定量地确定 (这里的可预报期限对应着一个平均的时间长度, 超出这个时间长度由于初始扰动在整个吸引子上的传播, 预测将完全失去意义).

### 3 试验设计

Lorenz 系统的方程为<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases}, \quad (8)$$

其中  $\sigma$  为 Prandtl 数,  $r$  为 Rayleigh 数 (下面本文将以  $Pr$  代替  $\sigma$ , 以  $Ra$  代替  $r$ ),  $b$  表示所研究对流区域的外形比参数. 假设系统真实的初始状态为  $X(t_0), Y(t_0), Z(t_0)$ , 系统真实的参数值分别为  $Pr, Ra, b$ , 而实际观测到系统的初始状态为  $X'(t_0), Y'(t_0), Z'(t_0)$ , 实际观测到系统的参数值为  $Pr', Ra', b'$ , 为了清楚地阐述初始误差和参数误差对系统可预报性的影响, 需要研究以下三类问题:

(1) 初始误差问题, 即初始值存在误差, 参数为

真实值, 讨论

$$\begin{aligned} X'(t_0) &= X(t_0), Y'(t_0) = Y(t_0), \\ Z'(t_0) &= Z(t_0)(1 + \epsilon), Pr' = Pr, \\ Ra' &= Ra, b' = b, \end{aligned}$$

其中  $\epsilon$  为引入的误差.

(2) 参数误差问题, 即初始值为真实值, 参数存在误差, 讨论

$$\begin{aligned} X'(t_0) &= X(t_0), Y'(t_0) = Y(t_0), Z'(t_0) = Z(t_0), \\ Pr' &= Pr, Ra' = Ra(1 + \epsilon), b' = b. \end{aligned}$$

(3) 初始误差和参数误差都存在的问题, 讨论

$$\begin{aligned} X'(t_0) &= X(t_0), Y'(t_0) = Y(t_0), \\ Z'(t_0) &= Z(t_0)(1 + \epsilon), Pr' = Pr, \\ Ra' &= Ra(1 + \epsilon), b' = b. \end{aligned}$$

从以上三类误差问题所给定的初始条件和参数条件出发, 积分 Lorenz 系统得到的预测曲线, 与从真实的初始条件和参数条件出发得到的真实演变曲线, 可以获得误差的演化曲线. 根据文献[9~12], 非线性误差增长理论主要用来研究初值问题, 其主要思想是假设初始误差存在 (不为 0) 的情况下研究初始误差的非线性增长. 因此, 不能直接利用非线性误差增长理论来研究参数误差问题 (初始误差为 0); 但是如果把参数  $Ra$  看成 Lorenz 系统除  $X, Y, Z$  的另外一个变量, 则参数误差问题就可以转化为初始误差问题, 同样可以利用非线性误差增长理论来研究参数误差问题的误差增长. 另外, 对于初始误差问题或参数误差问题, 按照前面非线性误差增长理论部分的介绍, 把 Lorenz 系统长期积分获得的同一条轨道上的不同点作为初始点作集合平均, 可得到反映系统全局特征的误差增长曲线, 最后可以定量地确定出系统在不同误差水平下的可预报期限.

### 4 结果分析

在“试验设计”一节中已讨论了本文要研究的三类问题, 下面分别列出所得到的结果.

#### 4.1 可预报期限随初始误差和参数误差大小变化的比较

对于给定的参数  $Pr = 10, Ra = 28, b = 8/3$ , 图 1(a, b) 分别给出了不同大小的初始误差和参数误差条件下 Lorenz 系统的误差平均相对增长随时间的变化曲线. 从图中可以看出, 无论是初始误差问题还是参数误差问题, Lorenz 系统的误差平均相对增长曲线的形状都十分相似. 起始表现为增长, 随着时间的增长, 误差达到饱和不再增长. 初始误差越

小,误差增长曲线达到饱和的时间越长;对参数误差,也同样如此.与以前的工作一致,如果将初始误差演化到误差饱和值的 99%时,所对应的时间定义为可预报期限<sup>[9~12]</sup>.可以看到,初始误差和参数误差的可预报期限都随着误差  $\epsilon$  的增大而减小,对于同样大小的误差  $\epsilon$ ,两者的可预报期限总体来说相差不大(图 2),这说明 Lorenz 系统对初始误差和参数误差的敏感程度基本相同,从这个角度看,正确地估计初始状态与模式方程的参数对于提高预报效果同样重要.

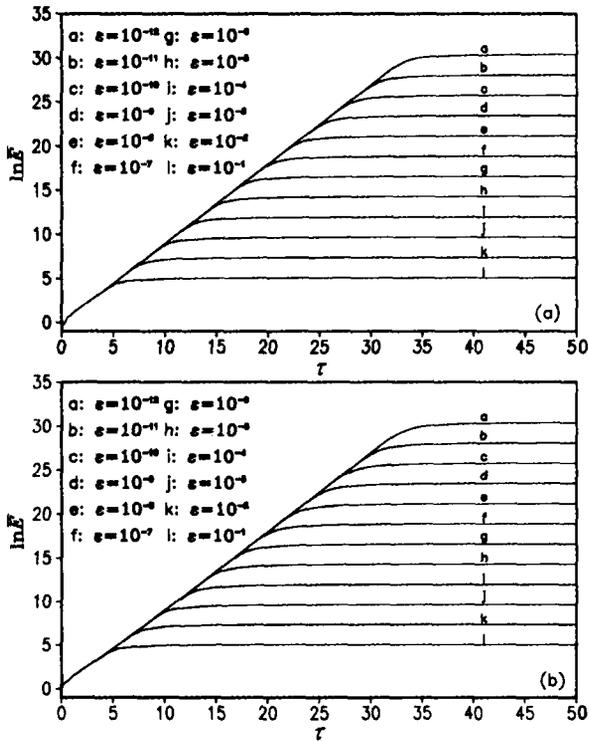


图 1 不同大小的初始误差(a)和参数误差(b)条件下, Lorenz 系统的误差平均相对增长  $\bar{E}(\delta(t_0), \tau)$  随时间  $\tau$  的变化  
Fig. 1 For the initial error (a) and parameter error (b) of different magnitudes, the mean relative growth of initial error  $\bar{E}(\delta(t_0), \tau)$  of Lorenz system as a function of time  $\tau$

#### 4.2 初始误差和参数误差大小固定条件下可预报期限随参数的变化

如图 3 所示,当误差大小固定为  $\epsilon = 10^{-6}$  时, Lorenz 系统初始误差和参数误差的可预报期限随参数  $Ra$  的变化趋势大体上相同,都随着  $Ra$  的增大可预报期限呈下降趋势.无论是初始误差还是参数误差,可预报期限随  $Ra$  的变化都比较平缓,参数  $Ra$  的微小变化并没有引起可预报期限的很大变化,这也是本文讨论的一个基础:控制参数的微小变化不会引起系统性质的重大变化,即控制参数不在临

界点附近.对参数  $Ra$  范围内的大多数取值,初始误差和参数误差的可预报期限总体上差别不大,仅有个别的  $Ra$  值两者的可预报期限有明显的差别.这表明初始误差和参数误差的可预报期限的比较结果基本上不随参数  $Ra$  而变化,也显示出在固定参数条件下研究比较初始误差和参数误差问题的合理性.

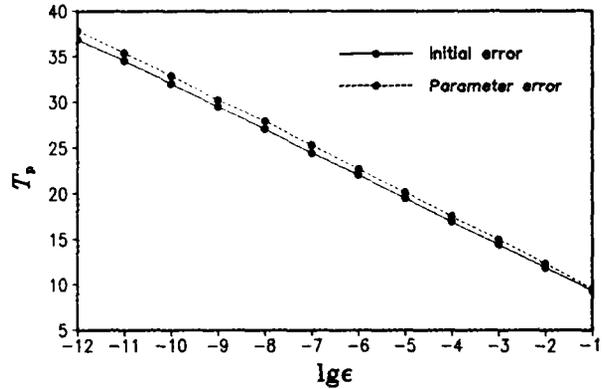


图 2 Lorenz 系统可预报期限  $T_p$  随不同大小的初始误差和参数误差的变化  
Fig. 2 The predictability limit  $T_p$  of Lorenz system as a function of initial error and parameter error of different magnitudes respectively

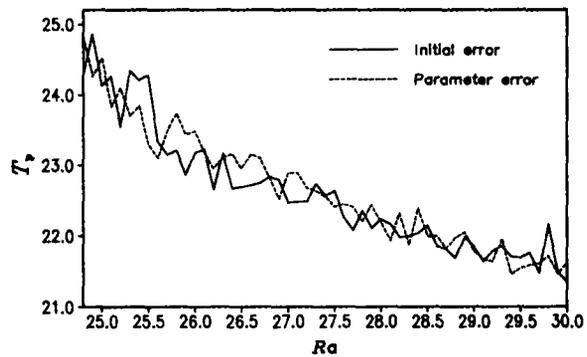


图 3 当初始误差和参数误差大小都为  $\epsilon = 10^{-6}$  时, Lorenz 系统的可预报期限  $T_p$  随参数  $Ra$  的变化  
Fig. 3 With the magnitude of initial error and parameter error both equal to  $10^{-6}$ , the predictability limit  $T_p$  of Lorenz system as a function of boundary forcing parameter  $Ra$

#### 4.3 初始误差和参数误差同时存在时可预报期限的变化比较

在实际情形下,往往初始误差和参数误差同时存在,两者对 Lorenz 系统的可预报期限的影响哪一个作用大?既然初始误差存在不可避免,是否可以不用考虑参数误差的作用呢?从图 4 可以看出,在初始误差大小固定为  $10^{-6}$ ,当参数误差相对初始误

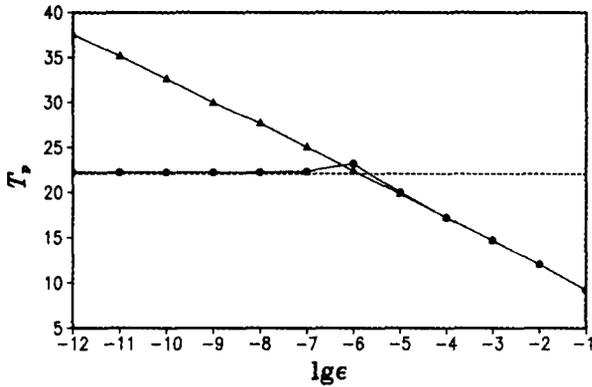


图4 当初始误差固定为  $10^{-6}$  时, Lorenz 系统的可预报期限  $T_p$  随参数误差  $\epsilon$  的变化(实心圆) 无初始误差时 Lorenz 系统的可预报期限  $T_p$  随参数误差  $\epsilon$  的变化用实三角形线表示, 虚直线表示初始误差大小为  $10^{-6}$  而无参数误差时 Lorenz 系统的可预报期限 ( $Ra=28$ ).

Fig. 4 For a constant initial error of  $10^{-6}$ , the predictability limit  $T_p$  of Lorenz system as a function of parameter error of different magnitudes (solid circle)

The changes of the predictability limit  $T_p$  of Lorenz system as a function of parameter error without initial error are denoted by closed triangle. Dashed line denotes the predictability limit of Lorenz system with the initial error equal to  $10^{-6}$  and no parameter error.

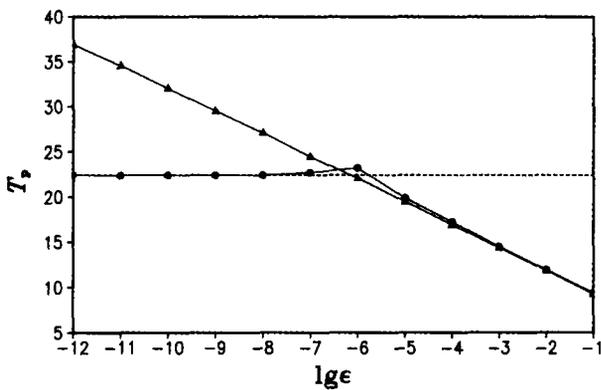


图5 当参数误差固定为  $10^{-6}$  时, Lorenz 系统的可预报期限  $T_p$  随初始误差大小  $\epsilon$  的变化(实心圆) 无参数误差时 Lorenz 系统的可预报期限  $T_p$  随初始误差  $\epsilon$  的变化用实三角形线表示, 虚直线为参数误差大小为  $10^{-6}$  而无初始误差时 Lorenz 系统的可预报期限 ( $Ra=28$ ).

Fig. 5 For a constant parameter error of  $10^{-6}$ , the predictability limit  $T_p$  of Lorenz system as a function of initial error of different magnitudes (solid circle)

The changes of the predictability limit of Lorenz system as a function of initial error without parameter error are denoted by closed triangle. Dashed line denotes the predictability limit of Lorenz system with the parameter error equal to  $10^{-6}$  and no initial error.

差较小, 在  $10^{-12} \sim 10^{-7}$  之间变化时, Lorenz 系统的可预报期限基本不随参数误差大小的变化而变化, 与仅有初始误差而无参数误差时 Lorenz 系统的可预报期限基本相同; 当参数误差相对初始误差较大, 在  $10^{-5} \sim 10^{-3}$  之间变化时, Lorenz 系统的可预报期限基本上不依赖于初始误差, 与仅有参数误差而无初始误差时系统的可预报期限基本相同; 当初始误差和参数误差大小相同都为  $10^{-6}$  时, Lorenz 系统的可预报期限反而比初始误差或参数误差单独存在时偏高. 图 5 给出当参数误差固定而初始误差大小可以变化的情况, 结果与图 4 十分相似.

## 5 结 论

本文利用非线性误差增长理论来比较研究 Lorenz 系统的初始误差和参数误差的可预报性问题, 分别研究了三类问题, 主要结论如下:

(1) 在固定参数条件下, 无论是初始误差问题还是参数误差问题, Lorenz 系统的误差平均相对增长曲线的形状都十分相似, 都是起始表现为增长, 随着时间的增长, 误差达到饱和不再增长. 初始误差和参数误差的可预报期限都随着误差的增大而减小, 对于同样大小的误差, 两者的可预报期限总体来说相差不大, 从这个角度说明, 正确地估计初始状态与正确地估计模式方程的参数对于提高预报效果同样重要.

(2) 当误差大小固定时, Lorenz 系统初始误差和参数误差的可预报期限随参数  $Ra$  的变化趋势大体上相同, 对参数范围内的大多数取值, 初始误差和参数误差的可预报期限总体上差别不大, 这表明了初始误差和参数误差的可预报期限的比较结果基本上不随参数  $Ra$  而变化.

(3) 当初始误差和参数误差都存在时, 两者对可预报期限的影响所起的作用大小主要取决于初始误差和参数误差的相对大小. 当初始误差远大于参数误差时, Lorenz 系统的可预报期限主要由初始误差决定; 反之, 当参数误差远大于初始误差时, Lorenz 系统的可预报期限主要由参数误差决定; 当初始误差和参数误差大小相当时, 两者都对系统的可预报期限起重要作用. 因此, 在讨论数值天气预报的可预报性问题时不能一概而论, 还要具体问题具体分析, 如果参数误差相对初始误差较小, 可以不用考虑参数误差对预报模式可预报性的影响; 但是, 如果参数误差相对初始误差较大或者两者大小相当,

在考虑初始误差对可预报性影响的同时就必须考虑参数误差的作用。

### 参考文献(References)

- [1] Lorenz E N. Climate predictability. In: The Physical Bases of Climate and Climate Modeling. No. 16 in GARP Publication Series, WMO, 1975. 132~136
- [2] Leith C E. Numerical simulation of the Earth's atmosphere. In: Methods in Computational Physics. New York: Academic Press, 1965. 1~28
- [3] Charney J G, Fleagle V E, Lally V E, et al. The feasibility of a global observation and analysis experiment. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 1966, **47**: 200~220
- [4] Lorenz E N. A study of the predictability of a 28 variable atmospheric model. *Tellus*, 1965, **17**: 321~333
- [5] Lorenz E N. Atmospheric predictability experiments with a large numerical model. *Tellus*, 1982, **34**: 505~513
- [6] Smagorinsky J. Problems and promises of deterministic extended range forecasting. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 1969, **50**: 286~312
- [7] Chu P C. Two kinds of predictability in the Lorenz system. *J. Atmos. Sci.*, 1999, **56**(10): 1427~1432
- [8] 卞建春, 杨培才. 关于大气过程可预报性问题的一些讨论. *高原气象*, 2003, **22**(4): 315~323  
Bian J C, Yang P C. Some remarks on the predictability of atmospheric process. *Plateau Meteorology* (in Chinese), 2003, **22**(4): 315~323
- [9] Ding R Q, Li J P. Nonlinear finite-time Lyapunov exponent and predictability. *Physics Letters A*, 2007, **364**(5): 396~400
- [10] 李建平, 丁瑞强, 陈宝花. 大气可预报性研究的回顾与展望. 见: 21 世纪初大气科学回顾与展望论文集. 北京: 气象出版社, 2006. 96~104  
Li J P, Ding R Q, Chen B H. Review and prospect on the predictability study of the atmosphere. In: Review and Prospects of the Developments of Atmospheric Sciences in the 21st Century. Beijing: China Meteorology Press (in Chinese), 2006. 96~104
- [11] Chen B H, Li J P, Ding R Q. Nonlinear local Lyapunov exponent and atmospheric predictability research. *Science in China (D)*, 2006, **49**(10): 1111~1120
- [12] 丁瑞强, 李建平. 非线性误差增长理论及可预报性研究. *大气科学*, 2007, **31**(4): 571~576  
Ding R Q, Li J P. Nonlinear error dynamics and predictability study. *Chinese J. Atmos. Sci.* (in Chinese), 2007, **31**(4): 571~576
- [13] Kazantsev E. Local Lyapunov exponents of the quasi-geostrophic ocean dynamics. *Appl. Math. Comp.*, 1999, **104**(2): 217~257
- [14] Ziemann C, Smith L A, Kurths J. Localized Lyapunov exponents and the prediction of predictability. *Physics Letters A*, 2000, **271**(4): 237~251
- [15] Yoden S, Nomura M. Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability. *J. Atmos. Sci.*, 1993, **50**(11): 1531~1543
- [16] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, **20**(2): 130~141