

利用一维时间序列确定吸引子维数中 存在的若干问题*

李建平 丑纪范

(兰州大学大气科学系, 兰州, 730000)

摘 要

从一些控制方程已知的微分动力系统出发, 利用它们不同分量、不同时间间隔的解序列重构相空间和原本相空间两种方式所得分维结果进行了比较, 发现了一些有意义的事实, 并探讨了用一维时间序列重构相空间确定吸引子维数的理论, 揭示出其中存在的本质问题。最后指出, 只有完全搞清动力系统的单分量序列采用怎样的延滞时间 τ 和怎样的采样间隔 H 延拓后才能保证重构相空间和原本相空间的度量性质不变时, 我们才能获得真实、可靠、有用的结果。

关键词: 分维, 一维时间序列, 动力系统, 相空间, 重构相空间, 吸引子。

1 引 言

近 20 年来, 非线性动力学取得了突飞猛进的发展, 成为研究自然界复杂现象内部机理的重要方法。其中一个重要的方面是 B. B. Mandelbrot 在 1970 年代引入了分形 (fractal) 概念^[1]。自此, 自然界中一类与平移不变性的周期结构不同的具有标度不变性的自相似结构便被揭示出来。利用分形几何这一数学工具可以对混沌现象中所具有的无穷嵌套的自相似几何结构加以详尽的描述, 即用奇怪吸引子的分维来描述其结构的复杂性, 进而对其动力学机制加以探讨。

对一个实际复杂的动力系统而言 (设它是 n 维的), 其可观测变量往往是有限的。如何通过已获得的系统某一变量或某几个变量得时间序列 (即系统动力学方程的解序列), 来提取动力系统的演变特征是我们关注的问题。Packard 等 (1980)^[2] 提出用时间序列重构相空间, 研究吸引子特性的几何; Takens (1981)^[3] 给出了一定条件下离散时间序列的嵌入定理; Peter Grassberger 等 (1983)^[4,5] 将时间序列延拓、提出用关联函数来确定吸引子维数的方法。此后, 利用一维时间序列确定吸引子维数的文章不断涌现。

然而, 从实际的工作中得知, 对同一气象要素利用其不同时间间隔的采样序列, 算得的维数不同; 不同气象要素的时间序列算得的维数不同; 等等。这些实践向我们提出如下问题:

(1) 对一动力系统的单分量序列, 采用不同时间间隔的采样重构相空间, 所得系统

* 初稿时间: 1994 年 10 月 17 日; 修改稿时间: 1995 年 5 月 22 日。

资助课题: 国家基础性重大关键项目“气候动力学和气候预测的研究”资助成果。

的维数是否相同?

(2) 一动力系统的不同分量序列, 采用相同或不同时间间隔的采样重构相空间, 所得系统的维数是否相同?

(3) 对一动力系统, 其原本相空间采用不同时间间隔的采样, 所得系统的维数是否相同?

(4) 对一动力系统的单分量序列, 采用不同时间间隔的采样重构相空间, 所得系统的分维数 D 随嵌入维数 m 是否一定收敛?

(5) 不同的延滞时间 τ 到底取多大为合适? 它在其中的地位是怎样的?

(6) 利用这种方法求得的维数 D , $[D] + 1$ 是否一定是描述该系统所需要的最少变量个数? 等等。搞清这些问题既有重要的理论意义也有深刻的实际意义。要说明上述问题, 必须从控制方程已知的动力系统进行研究。因为, 这使得问题的讨论存在可比较的标准: (a) 系统的自由度已知; (b) 系统的真实相空间(为了与延拓重构相空间区分, 下面称它为原本相空间, 即 n 维动力系统的 n 个独立变量所构成的状态空间)能直接获得, 这样可以同利用系统单分量序列重构相空间的结果加以比较。本文将从一些已知的动力系统出发, 利用它们不同分量、不同时间间隔的解序列重构相空间和原本相空间两种方式所得的维数的比较结果, 试图回答上述问题。

2 实例研究与讨论

2.1 分维计算方法简介

利用一维时间序列计算系统分维的方法, 一般采用 Grassberger 等^[4,5]提出的一种关联函数法。若原本相空间已知时, 对其中任意两个点 $X_i, X_j, i, j = 1, 2, \dots, N$, 定义关联函数:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N^2) \sum_{i,j=1}^N H(r - |X_i - X_j|) \quad (1)$$

其中 $H(x)$ 为 Heaviside 函数, 即

$$\begin{aligned} H(x) &= 0, & \text{当 } x < 0 \\ H(x) &= 1, & \text{当 } x > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$|X_i - X_j|$ 表示相空间中任意两点 X_i, X_j 的距离; r 为量测半径。在一定范围内的 r , $C(r)$ 满足标度律:

$$C(r) \propto r^D \quad (3)$$

则 D 即为吸引子维数。

对于一维时间序列 $x(t_i), i = 1, 2, \dots, N, x_i \in R$, 文献[2-5]建议重构相空间的办法来求取维数。即对于一个 m 维流, 可以选择单分量的时间序列进行延拓得向量:

$$\xi_i = (x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)) \quad (4)$$

其中 τ 为延滞时间, 用 ξ -空间代替原本相空间, 利用关联函数法估计系统的维数。

2.2 Lorenz 吸引子

Lorenz 模型^[8]为:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y - x) \\ dy/dt &= -y - xz + Rx \\ dz/dt &= xy - bz \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $R = 28.0$, $\sigma = 10.0$, $b = 8/3$ 。采用四阶 Runge-Kutta 积分方法, 时间步长取为 $H = 0.01$ 。剔除前 5000 步(使其进入混沌状态), 得式(5)的解序列为

$$\begin{cases} X_H = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \\ Y_H = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \\ Z_H = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\} \end{cases} \quad (6)$$

为了研究不同时间间隔的采样对计算结果的影响, 在式(6)中每隔 $10H$ 、 $20H$ 取一个采样得另两组解序列

$$\begin{cases} X_{10H} = \{x_1, x_{11}, \dots, x_{10n+1}, \dots\} \\ Y_{10H} = \{y_1, y_{11}, \dots, y_{10n+1}, \dots\} \\ Z_{10H} = \{z_1, z_{11}, \dots, z_{10n+1}, \dots\} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} X_{20H} = \{x_1, x_{21}, \dots, x_{20n+1}, \dots\} \\ Y_{20H} = \{y_1, y_{21}, \dots, y_{20n+1}, \dots\} \\ Z_{20H} = \{z_1, z_{21}, \dots, z_{20n+1}, \dots\} \end{cases} \quad (8)$$

显然, 式(7)、(8)是式(6)的两组不同时间间隔采样的子序列。这样选取的实际意义是, 对一实际系统采用逐秒、逐分、逐时、逐日等等的不同时间间隔的观测资料对计算结果的影响。以上 $n = 15,000$, 对于 Lorenz 系统这个点数已是足够的了。

2.2.1 计算结果及分析

计算的中间结果见图 1(a)–(f), 最后结果列于表 1、2。

表 1 Lorenz 吸引子不同分量序列在不同参数下的分维结果

τ	1	5	25
X_H	1.866	1.975	> 7.064
X_{10H}	2.031	> 5.956	> 7.524
X_{20H}	2.516	> 8.665	> 9.012
Z_H	1.896	2.002	> 5.967
Z_{10H}	2.215	> 4.588	> 8.188
Z_{20H}	2.675	> 5.943	> 9.493

由表 1 知: 对 Lorenz 系统而言

(1) 利用其单分量(如 x 或 z)序列, 采用不同时间间隔的采样重构相空间, 所得系统的维数是不同的, 且有很大差别;

(2) 利用其不同分量(如 x 和 z)序列, 采用相同或不同时间间隔的采样重构相空间, 所得系统的维数有些接近, 有些差别很大;

(3) 不同的延滞时间 τ , 计算的结果差别甚远。

对于原本相空间的情况, 其计算结果表明(见表 2):

(a) 原本相空间采用不同时间间隔的采样, 所得系统的维数基本相同, 即 $D \approx 2.02$;

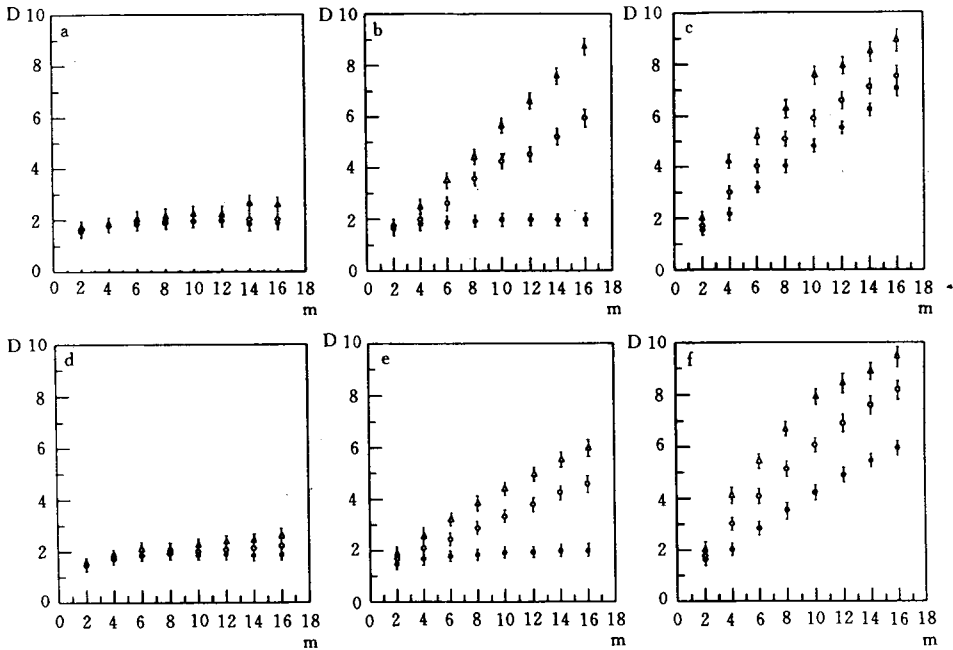


图1 Lorenz 吸引子不同分量序列在不同参数下的分维值随嵌入维数 m 的变化
 (x 分量: $a, \tau = 1; b, \tau = 5; c, \tau = 25$; z 分量: $d, \tau = 1; e, \tau = 5; f, \tau = 25$;
 ●、○、△ 分别是采样间隔为 $H, 10H, 20H$ 的序列结果)

(b) 对这个例子,算得的维数 D , $[D] + 1$ 是描述该系统所需要的最少变量个数。

表2 Lorenz 吸引子的原本相空间*
 在不同采样间隔下的分维结果

	$(X, Y, Z)_H$	$(X, Y, Z)_{10H}$	$(X, Y, Z)_{20H}$
D	2.024	2.022	2.029

* 原本相空间的定义如引言中所述,对 Lorenz 吸引子而言其原本相空间即 3 个独立变量 X, Y, Z 所构成的状态空间

2.2.2 讨论

Lorenz 系统是一个三维自治动力系统。任何一个正确合适的维数计算方法,所得结果都不应该大于 3。从表 1 可见:

(1) 结果小于 3 的情况。当延滞时间 τ 较小时(如 $\tau = 1$ 等),所得维数小于 3。然而,这些结果并不意味着正确。因为有些时候(如 x, z 变量, $\tau = 1, H = 0.01$; x 变量 $\tau = 5, H = 0.01$ 时),所得维数 < 2.0 ; 而另一些时候(如 x, z 变量, $\tau = 5$, 采样间隔为 $10H, 20H$ 时),所得维数 > 2.0 。哪一个是正确的呢? 根据表 2 原本相空间的计算结果知后者是合适的。然而,这是有原本相空间这个标准才得出上面的结论。因为实际的情况(如大气系统等),

原本相空间是不能得到的。因此,对于原本相空间未知的系统,采用其单分量进行延拓计算,出现上述情况该选择哪个呢?如果原本相空间已知,就没有必要用一维时间序列延拓计算了。所以,重构相空间这一理论存在一个严重问题是未能给出判断的标准。

(2) 结果大于 3 的情况。当延滞时间 τ 较大时(如 $\tau = 5, 25$ 等), 所得维数大于 3。这些结果显然是不正确的。但如果对 Lorenz 系统并不了解(即其控制方程未知), 而只获得了其中的一个变量的解序列, 那么凭借什么标准来说这些结果不正确呢? 这也是重构相空间理论所未给出的。

(3) 对于结果大于 3 的情况, 还可以注意到另一重要事实。见图 1, 这些结果有些是随嵌入维数 m 而呈发散趋势; 有些是趋于收敛。嵌入理论认为, 用一维时间序列重构相空间计算系统的维数, 若所得维数 D 随嵌入维数 m 呈发散趋势时, 则认为这个系统是随机系统; 相反, 若所得维数 D 随嵌入维数 m 趋于收敛, 则认为这个系统是确定系统, 且收敛的 D 值即为该系统的分维。以上的结果却与它违背。当 Provenzale 等^[9] 发现一完全随机系统, 会出现 D 随嵌入维数 m 收敛时, 就部分否定了嵌入理论的上述认识。

现在, 发现一完全确定系统, 会出现 D 随嵌入维数 m 呈发散时, 也部分否定了嵌入理论上述认识的另一部分。这就是说这一理论的某些结论需要修改或需要附加条件。

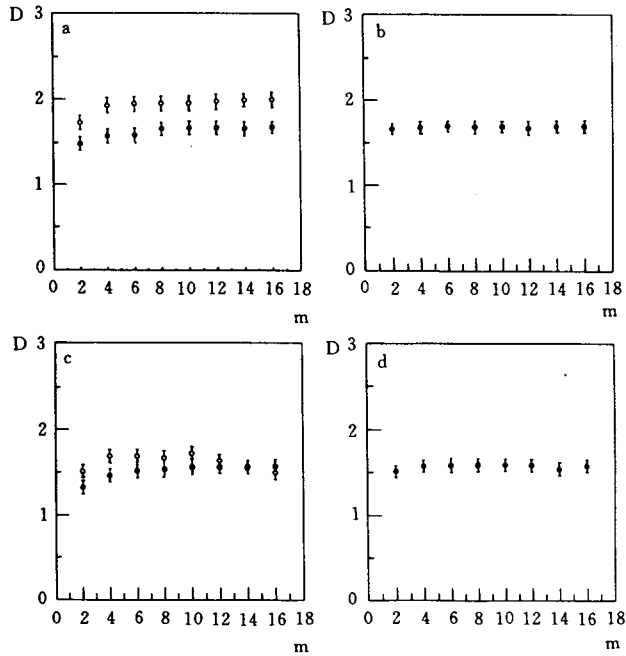


图 2 Rossler 吸引子不同分量序列在不同参数下的分维值随嵌入维数 m 的变化
(x 分量: a, $\tau = 5$; b, $\tau = 25$; z 分量: c, $\tau = 5$; d, $\tau = 25$;
●、○分别是采样间隔为 $H, 10H$ 的序列结果)

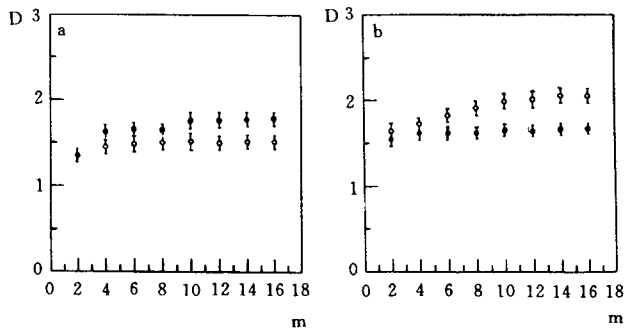


图 3 Brusselator 振子不同分量序列在不同参数下的分维值随嵌入维数 m 的变化
(a, b 分别是 x, z 分量采样间隔为 H 的序列结果;
●是 $\tau = 5$ 的情况; ○是 $\tau = 25$ 的情况)

(4) 不同的分量序列为什么所得系统的维数会有很大差别? 哪一个分量的计算结果正确呢? 这里可能蕴含着系统的不同分量应选择与之相匹配的采样间隔和延滞时间 τ 才能得到正确的结果。但是, 对应不同的分量相匹配的采样间隔和延滞时间 τ 该怎样选取呢? 这也是重构相空间理论所未回答的。

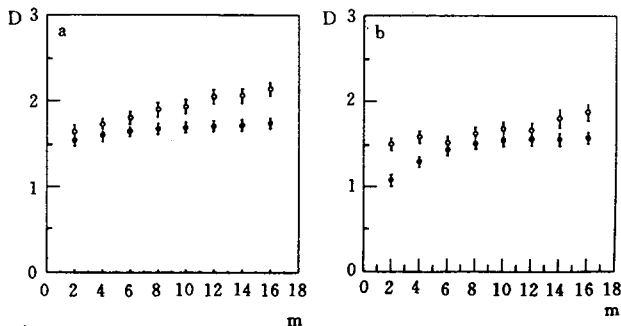


图 4 超混沌系统不同分量序列在不同参数下的分维值随嵌入维数 m 的变化

(a、b 分别是 x 、 z 分量采样间隔为 H 的序列结果;
●是 $\tau = 5$ 的情况; ○是 $\tau = 25$ 的情况)

(5) 由表 1 和表 2 可以看到一个重要问题是: 为什么原本相空间所得结果不随采样间隔发生变化而单变量序列的结果

不仅随采样间隔发生变化也随分量的不同而不同呢(这一点在下面的例子中还将看到)? 这就是说单变量序列采用怎样的 τ 和怎样的间隔 H 延拓后, 才与原本相空间是拓扑等价的呢? 这个问题不搞清楚, 就无法判断所得维数的可靠性。然而, 嵌入理论是没有给出这个标准。

2.3 其它微分系统

按 2.2.1 中的方式对下面的微分系统做了部分计算, 求解算法均采用四阶 Runge-Kutta 积分方法, 时间步长取为 $H=0.01$, 序列的总点数均取为 15,000(由于计算量很大, 很耗时, 加之经费有限, 所以没能计算更多的情况。本文所作的计算已足够说明问题)。

Rosler 吸引子

$$\begin{cases} dx/dt = -(y + z) \\ dy/dt = x + ay \\ dz/dt = b + z(x - c) \end{cases} \quad (9)$$

其中 $a = b = 0.2, c = 5.7$ 。

强迫 Brusselator 振子

$$\begin{cases} dx/dt = A + x^2y - Bx - x + a \cos(ft) \\ dy/dt = Bx - x^2y \end{cases} \quad (10)$$

其中 $a = 0.05, A = 0.4, B = 1.2, f = 0.95$ 。

超混沌系统

$$\begin{cases} dx/dt = -y - z \\ dy/dt = x + 0.25y + w \\ dz/dt = 3 + xz \\ dw/dt = -0.5z + 0.05w \end{cases} \quad (11)$$

以上例子计算的中间结果见图 2-4, 最后结果列于表 3、4。

表 3 几种动力系统不同分量序列在不同参数下的分维结果

	τ	5	25
Rossler 吸引子	X_H	1.669	1.701
	X_{10H}	2.001	—
	Z_H	1.560	1.580
	Z_{10H}	1.650	—
Brusselator 振子	X_H	1.790	1.515
	Z_H	1.665	2.057
超混沌系统	X_H	1.740	2.139
	Z_H	1.582	1.880

由表 3、4 知:

(1) 单分量序列重构相空间情形

对 Rossler 吸引子、Brusselator 振子、超混沌系统等的单分量序列的计算结果中的问题, 同 Lorenz 系统中的结论一致;

(2) 原本相空间情形

(a) 原本相空间所得维数都不随采样间隔而发生变化, 具体结果是: Rossler 吸引子的维数 $D \approx 1.77-1.79$; Brusselator 振子的维数 $D \approx 1.8$; 超混沌系统的维数 $D \approx 2.03-2.05$;

(b) 对于 Rossler 吸引子、超混沌系统中, $[D]+1$ 不是描述该系统所需的最少变量个数。这就否定了原来认为 $[D]+1$ 是描述系统所需要的最少变量个数的说法。

(3) Brusselator 振子

与 Lorenz 等自治系统所不同的是, 一个二维非自治动力系统。在原本相空间已知时, 可得其维数大约为 1.8 左右。而对于其单分量的计算结果则有些适合, 有些不正确。对于这个例子, 算得的维数 D , $[D]+1$ 是描述该系统所需要的最少变量个数。然而并不能由此确定它是自治动力系统。恰恰相反, 它是一个非自治动力系统。因此, 利用单分量序列计算出系统的维数, 然后把系统当做是自治系统进行反演的做法是没有根据的。

表 4 几种动力系统的原本相空间*在不同采样间隔下的分维结果

采样间隔		H	10H	20H
Rossler 吸引子	D	1.778	1.795	1.776
Brusselator 振子	D	1.723	1.855	1.829
超混沌系统	D	2.046	2.058	2.037

* Rossler 吸引子、Brusselator 振子和超混沌系统的原本相空间分别为 (X, Y, Z) 、 (X, Y) 和 (X, Y, Z, W)

3 理论探讨

由上面结果看到一个重要事实: 原本相空间所得维数结果不随采样间隔变化而变化; 单变量序列所得维数却随采样间隔发生变化, 不同的采样间隔, 结果差别甚远, 且所得系统的维数会出现超过系统自由度的错误结果; 同时, 不同的分量序列结果也会有很

大差别。为什么会出现这种情况呢? 这就是单变量序列重构相空间本身的问题了。为此, 再讨论一下重构相空间的理论。

3.1 自治动力系统的情况

一个 n 维自治动力系统可表示成如下形式:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (12)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, 其随时间的演化由 n 个变量 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的 n 维相空间的轨迹

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (13)$$

所描述。

为了用单变量的时间序列刻画原动力系统的轨道的图像, 也即用单个变量的时间序列来恢复原动力系统的相空间, 要把含有多变量的一阶微分方程组转化成只含有一个变量的高阶微分方程。对于连续型时间变量的情形, 重构相空间理论认为连续多次对时间求导并消元, 可把方程组(12)转化为一个变量的 n 阶微分方程

$$x^{(n)} = f[x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}] \quad (14)$$

它相当于描述时间演化

$$X(t) = [x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] \quad (15)$$

的 n 个方程。这样该理论认为式(15)与式(13)是等价的, 并可用式(15)来替代式(13)的研究。

然而, 问题的关键是对多变量的一阶微分方程组(12)是否一定能转化成只含一个变量的高阶非线性微分方程(14)呢? 在数学上是没有这样的定理。已知, 单变量的高阶微分方程总是可以通过引进新的变量而将其化成一个多变量的一阶微分方程组; 反之却不成立。例如方程组

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

不能化为一个二阶微分方程^[10]。也即是说, 一阶微分方程组(13)不一定能化成只含一个变量的高阶非线性微分方程(15)。因此, 重构相空间理论的上述假设在一般意义下是不成立的。同时, 对于实际系统, 其中的变量的高阶导数是否存在也是一个问题。

对于离散型时间变量的情形, 即对单个变量的时间序列

$$x_i = x(t_0 + iH) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

其中 t_0 表示起始时刻, H 为采样间隔。如前所述, 重构相空间理论^[2-5]认为可用时间序列延拓重构相空间的办法来恢复原动力系统的相空间。即对于一个 m 维流, 可选择单分量的时间序列延拓得向量:

$$\xi_i = (x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau/H)$$

其中 τ 为延滞时间, 用 ξ -空间代替原动力系统的相空间。这一想法的依据是 Takens 定理^[3]:

Takens 定理: 设 M 是一个 m 维紧流形, 对于点对 (φ, y) , 其中 $\varphi: M \rightarrow M$ 是一光滑微分同胚, $y: M \rightarrow R$ 为一光滑函数, 一般的特性是映射 $\Phi_{(\varphi, y)}: M \rightarrow R^{2m+1}$ 是一个嵌入, 其中

$$\Phi_{(\varphi, y)}(x) = (y(x), y(\varphi(x)), \dots, y(\varphi_{2m}(x))) \quad (17)$$

这里“光滑”至少是 C^2 的。

应该看到 Takens 定理成立的前提条件, M 是紧流形; 对于非紧流形下没有这样的定理。即 Takens 理论并没有在一般意义下对具有分维特征的一般吸引子得到证明。因此, 对于那些不满足 Takens 定理条件的系统是否能用它不能断定。而且, 怎样判断一系统是否满足这个定理的条件, 也是没有标准判定。同时, 虽然 Takens 定理没有对函数的具体形式给予限制, 但对于实际系统的单个变量序列延拓重构相空间, 是否在任何延滞时间 τ 和采样间隔 H 下都与原本相空间是拓扑等价的呢(即保持度量性质不变)? 这一理论没能回答。本文的结果表明, 此问题的回答是否定的。那么, 单变量序列采用怎样的 τ 和怎样的采样间隔 H 延拓后才能保证重构相空间与吸引子的度量性质不变呢? 这一理论是没有给出判断标准的。这为实际工作带来很大的不确定性。

3.2 非自治动力系统的情况

对于 n 维非自治动力系统, 即

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (18)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, 自治动力系统中所存在的问题在此同样存在。同时, 对于它比自治动力系统存在更多的问题, 虽然它总是可以引进新的变量而化为自治动力系统, 形式上不会超越自治动力系统的情况, 但实质上有着根本的不同。因为这些新的变量(针对式(18)中显含时间 t 的函数项所引入的)并不是系统所固有的独立变量(x_1, x_2, \dots, x_n) (注意: 一个非自治动力系统可以化为多种形式的自治动力系统, 而不是只能化为一种形式的自治动力系统), 所以在用单个变量时间序列重构相空间计算系统维数时不能选用这些新引入变量中的任一个。

3.3 延滞时间 τ 的选取问题

表 5 表 1 中相应的延滞相关系数(序列点数为 $n = 15,000$)

	τ	1	5	25
	r_H	0.9956 ^o	0.9651 ^o	0.4900 ⁺
X 变量	r_{10H}	0.8671 [*]	0.1600 ⁺	0.0282 ⁺
	r_{20H}	0.5964 [*]	0.1070 ⁺	0.0299 ⁺
	r_H	0.9958 ^o	0.8996 [*]	-0.3021 ⁺
Z 变量	r_{10H}	0.6322 [*]	-0.3858 ⁺	-0.0627 ⁺
	r_{20H}	-0.0493 [*]	-0.2304 ⁺	-0.3291 ⁺

* 表中 $H=0.01$, 带 * 者为表 1 中所得维数是符合实际的;

带 ^o 和 ⁺ 者为表 1 中所得维数是不符合实际的, 其中带 ^o 者 < 2.0 ; 带 ⁺ 者 > 3.0

从计算结果知道不同的延滞时间 τ 对单分量序列重构相空间计算维数的结果有很大影响, 它到底取多大为合适? 通常认为延滞时间 τ 取较大为宜, 理由是这时单变量序列的延滞相关趋于 0, 认为这样可保证延拓后各分量间是独立的。是否真是如此? 由作者的结果如 Lorenz 系统等, 延滞时间 τ 大反而结果不正确。对此, 以 Lorenz 系统为例来详细讨

论这个问题。表 5 给出表 1 中相应的延滞相关系数。从表 5 可以看到, 在用单个变量时间序列确定系统的维数中, 符合实际的结果中既有延滞相关趋于 0 的(如 z 变量, 采样间隔为 $20H$, $\tau = 1$), 也有延滞相关很大的(如 x 变量, 采样间隔为 $10H$, $\tau = 1$; z 变量, 采样间隔为 $20H$, $\tau = 5$; 等); 不符合实际的结果中同样既有延滞相关趋于 0 的(如 x 变量, 采样间隔为 $10H$ 或 $20H$, $\tau = 25$; z 变量, 采样间隔为 $10H$, $\tau = 25$), 也有延滞相关很大的(如 x 变量, 采样间隔为 H , $\tau = 1$ 或 5 ; z 变量, 采样间隔为 H , $\tau = 1$); 延滞相关趋于 0 与结果是否符合实际之间并没有必然的对应关系。因此, 通常认为选取延滞时间 τ 以使得重构的相空间中两两“坐标”的相关性趋于 0 并不一定就能得到真实的结果。究其原因, 事实上是蕴含着不相关性、统计独立和动力独立三者之间的不同性, 统计独立和动力独立是完全的两码事。就是在统计上, 即使两变量的统计相关为 0 (即不相关) 也不能保证它们是统计独立的。而在动力系统中, 两变量是动力独立的, 其统计相关也不一定趋于 0, 而可能有着很高的统计相关。如对 Lorenz 系统, 用数值积分求解它, 其 x 变量序列和 y 变量序列有很高的统计相关(当采样间隔为 H 、 $10H$ 和 $20H$ 时, 相关系数分别为 0.8817、0.8782 和 0.8774)。

3.4 讨论

上述讨论表明, 用单个变量时间序列重构相空间理论中存在许多本质上的问题, 其可成立的范围、如何判断一实际系统是否满足应用重构相空间理论的条件、延滞时间 τ 究竟选取多少且与之相匹配的采样间隔 H 应是怎样、不同的分量序列所得系统的维数为什么会有很大差别、哪一些分量所得结果是符合实际的呢? 等等问题, 都是重构相空间理论所没能回答清楚的。这种不确定性导致了其在实际应用上的不可靠性。正是由于以上原因, 才导致了我们在前面计算的结果与实际的情况出现的矛盾。

4 结论

本文从一些已知的微分动力系统出发, 利用它们不同分量、不同时间间隔的解序列重构相空间和原本相空间两种方式所得的维数的比较结果, 对一维时间序列确定吸引子维数中的若干问题作了一些研究, 得到如下结论:

- (1) 对一动力系统的单分量序列, 采用不同时间间隔的采样重构相空间, 所得系统的维数是不同的, 且差别很大;
- (2) 一动力系统的不同分量序列, 采用相同或不同时间间隔的采样重构相空间, 所得系统的维数有些接近, 有些相差很大;
- (3) 对一动力系统, 其原本相空间采用不同时间间隔的采样, 所得系统的维数是基本相同的;
- (4) 对一动力系统的单分量序列, 采用相同或不同时间间隔的采样重构相空间, 所得系统的分维数 D 随嵌入维数 m 不一定会收敛;
- (5) 不同的延滞时间 τ 对单分量序列重构相空间计算维数的结果有很大影响, 它到底取多大为合适, 没有结论;
- (6) 利用这种方法求得的维数 D , $[D] + 1$ 不一定是描述该系统所需要的最少变量个数。

由以上事实,我们进而对一维时间序列重构相空间的确定吸引子维数的理论作了讨论,揭示出其中存在的许多本质问题。因此,这一理论在应用上存在着很大的问题,目前利用实际系统的单变量序列算得的维数,还缺乏可靠性。只有完全搞清怎样的延滞时间 τ 和怎样的采样间隔 H 延拓后以保证重构相空间与原本相空间的度量性质不变时,才能获得真实可靠有用的结论。

致谢:在本文完成过程中,第一作者得到了史久恩教授、王绍武教授及中国科学院应用数学研究所潘一民研究员的指导和大力帮助,并与兰州大学数学系邹鹏程博士进行了有益的讨论,特此一并致谢!

参考文献

- [1] Mandelbrot B B. Fractals—form, chance and dimension. Freeman, San Francise, 1977.
- [2] Packard N H, Cratchfield J P, Farmer J D and Show R S. Geometry from a time series. Phys Rev Lett, 1980, 45: 712—715.
- [3] Takens F. Detecing strange attractors in turbulence, dynamical systems and turbulence. Warwick, Springer-Verlag, 1981, 366—381.
- [4] Grassberger P and Procaccia J. Measuring the strangeness of strange attractors. Physica D, 1983, 9: 189—208.
- [5] Grassberger P and Procaccia J. Characterization of stractors. Phys Rev Letters, 1983, 50: 346—349.
- [6] Fraedrich K. Estimating the dimensions of weather and climate attractors. J Atmos Sci, 1986, 43: 419—432.
- [7] Fraedrich K. Estimating weather and climate predictability on attractors. J Atmos Sci, 1987, 44: 722—728.
- [8] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J Atmos Sci, 1963, 20 (1): 130—141.
- [9] Provenzale A, Osborne A R and Soj R. Convergence of the K^2 entropy for random noises with power law spectra. Physica D, 1991, 47: 361—372.
- [10] 王高雄,周之铭,朱思铭,王寿松.常微分方程(第二版).北京:高等教育出版社,1983,176—177.
- [11] 李建平.非线性气候动力学的若干研究.兰州:兰州大学硕士学位论文,1994.
- [12] Grassberger P and Procaccia J. Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach. Physica D, 1984, 13: 34—54.
- [13] 郑祖光,刘式达.用大气湍流资料计算 Lyapunov 指数和分维.气象学报,1988,46 (1): 41—78.
- [14] Falconer K J. Fractal geometry, mathematical foundations and applications. Oxford, Pergamon press, 1990 (有中译本).

SOME PROBLEMS EXISTED IN ESTIMATING FRACTAL DIMENSION OF ATTRACTOR WITH ONE-DIMENSIONAL TIME SERIES

Li Jianping Chou Jifan

(Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou, 73000)

Abstract

Based on the some differential dynamic systems of known control equations, it is found that there existed some essential problems in estimating the fractal dimensions of attractors with one dimensional time series, by a comparison between the two fractal dimension results of the reconstructed phase-space, which is made according to their solution series of different components and different time intervals, and of the original phase-space. Some significant facts are found. Then, the theory of reconstructed phase-space with one dimensional time series is discussed and some essential problems existed in it are found. Finally, it should be pointed out that the real, reliable, useful results would be obtained only when the clear understanding of what kind of the delay time τ and the sample interval H are used in a single-variable of the dynamic system to keep the same measure nature between the reconstructed phase-space and the original phase-space.

Key words: Fractal dimension, One-dimension time series, Dynamic system, Original phase-space, Reconstructed phase-space, Attractor.