大气方程组的惯性流形*

李建平
(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点试验室, 北京 100029)
丑纪范
(兰州大学大气科学系, 兰州 730000)

摘要　从一类非线性演化方程出发, 得到其全局吸引子, 并利用截断技巧讨论了它的惯性流形. 然后, 根据大气方程组算子的性质, 证明强迫耗散非线性大气算子方程即为这类非线性演化方程, 从而在耗散算子满足谱间断条件下得到大气方程组的惯性流形的存在, 为进一步研究大气方程组全局吸引子上的动力性质及设计性能良好的数值格式提供了基础.

关键词　惯性流形　非线性演化方程　全局吸引子　算子方程　算子

强迫耗散非线性大气动力学方程组的定性理论研究表明[1~13], 无论是干空气还是湿大气, 无论是有地形作用还是无地形作用, 无论是定常外源强迫还是非定常外源强迫, 大气系统都将随着时间的增长演化到全局吸引子上, 其解的长期行为是由全局吸引子决定的, 全局吸引子外的点的运动只有暂态意义, 对于研究时间趋于无穷的渐近状态无关. 大气吸引子的存在性揭示出大气系统具有向外源强迫的非线性适应过程, 完整的大气动力学偏微分方程组解的渐近性质可以用一个有限维的常微分方程组精确描述, 从而为建立和设计长期数值天气预报模式和数值气候预测模式提供了必要的数理依据. 然而, 这个全局吸引子可能具有分数维数, 是不光滑的流形. 同时, 吸引子对系统解轨道的收敛率也不是指数控制的. 这就为进一步的动力分析和实际计算带来困难. 因此, 寻找包含全局吸引子且是指数吸引解轨线的不变的光滑流形是重要的, 这就是近年来在无穷维动力系统的研究中, 除全局吸引子外, 另一个刻划方程解的渐近性态的重要基本概念——惯性流形[14~16]. 研究惯性流形不仅对分析全局吸引子上的动力性质有重要意义, 而且对设计合理的离散化数值格式也有重要的指导意义. 大气方程组是否存在惯性流形呢? 本文就主要讨论这个问题.

1　惯性流形的定义

定义 1　设半群算子 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 具有全局吸引子 $\mathscr{A}$, 子集 $M_I\subset H$ (H 是 Hilbert 空间) 是它的一个惯性流形, 如果它满足:

(ⅰ) M_I 是有限维的光滑流形 (起码是 Lipshitz 流形);

1998-05-23 收稿, 1998-10-20 收修改稿
* 国家重点基础研究发展规划项目和国家科委"攀登计划"基础性研究重大关键项目资助

(ⅱ) M_I 是不变流形, 即有

$$S(t)M_I \subset M_I; \tag{1}$$

(ⅲ) M_I 指数吸引系统的所有解轨道, 即存在常数 $k_1,\ k_2>0$, 对于 $u_0\in \mathrm{H}$, 有

$$\mathrm{dist}(S(t)u_0, M_I) \leqslant k_1 \mathrm{e}^{-k_2 t}, \quad \forall t \geqslant 0; \tag{2}$$

(ⅳ) $S(t)$ 的全局吸引子 $\mathscr{A}$ 在 M_I 上.

2　一类非线性演化方程的全局吸引子及其惯性流形

2.1　一类非线性演化方程

给定 Hilbert 空间 H, 内积$(\circ, \circ)$, 范数$|\circ|$. 考虑如下的一类非线性演化方程

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} + L\vartheta + R(\vartheta) = 0, \tag{3}$$

其中

$$R(\vartheta) = \delta_1 B(\vartheta, \vartheta) + \delta_2 B_1(\vartheta, \vartheta) + \delta_3 A\vartheta - f, \tag{4}$$

其中 $\delta_i(i=1, 2, 3)$ 满足

$$\delta_i = 0 \text{ 或 } 1, \text{ 且 } \delta_1 + \delta_2 \geqslant 1. \tag{5}$$

对 $\delta_2=0$ 的情形, 已有文献讨论过[14~16]; 对 $\delta_2=1$ 的情形则是本文首先提出并研究的. 线性算子 L 是 H 中无界自伴正定算子, $D(L)$ 在 H 中稠, L^{-1} 是紧的. 映射 $\vartheta\rightarrow L\vartheta$ 是 $D(L)$ 到 H 的同构. 令 L^s 表示 L 的 s 次幂($s\in \mathrm{R}$). 空间 $V_{2s}=D(L^s)$ 是具如下内积的 Hilbert 空间

$$(\vartheta_1, \vartheta_2)_{2s} = (L^s\vartheta_1, L^s\vartheta_2), \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in D(L^s), \tag{6}$$

$\vartheta\in V_s$, 令

$$|\vartheta|_s = (\vartheta, \vartheta)_s^{1/2}. \tag{7}$$

由于 L^{-1} 是自共轭的紧算子, 所以由 Rellich 推论[14~16] 知, H 中存在一个由 L 的特征向量构造的完备正交基$\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$和可数个正数 λ_j 使得

$$Lw_j = \lambda_j w_j (j = 1, 2, \cdots) \tag{8}$$

特征值$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$满足

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \lambda_{j+1} \leqslant \cdots, \tag{9}$$

$$\lim_{j\rightarrow\infty} \lambda_j = +\infty. \tag{10}$$

由(8), (9) 式易得

$$|L^{1/2}\vartheta| \geqslant \lambda_1^{1/2}|\vartheta|, \quad \forall \vartheta \in D(L^{1/2}), \tag{11}$$

$$|L^{s+1/2}\vartheta| \geqslant \lambda_1^{1/2}|L^s\vartheta|, \quad \forall \vartheta \in D(L^{s+1/2}), \quad \forall s. \tag{12}$$

记 $P=P_N$ 是从 H 到 $\mathrm{Span}\{w_1, \cdots, w_N\}$ 的正交投影, $Q_N=I-P_N$, 则有

$$\lambda_1|p| \leqslant |Lp| \leqslant \lambda_N|p|, \quad p \in PD(L), \tag{13}$$

$$|Lq| \geqslant \lambda_{N+1}|q|, \quad q \in QD(L), \tag{14}$$

$B(\vartheta, \vartheta),\ B_1(\vartheta, \vartheta)$ 是 $D(L)\times D(L)\rightarrow \mathrm{H}$ 上的双线性算子, A 是$D(L)\rightarrow \mathrm{H}$ 的线性算子, 设 $B(\vartheta, \vartheta),\ B_1(\vartheta, \vartheta)$ 满足

$$(\delta_1 B(\vartheta, \vartheta_1) + \delta_2 B_1(\vartheta, \vartheta_1), \vartheta_1) = 0, \quad \forall \vartheta, \vartheta_1 \in D(L), \tag{15}$$

$$|B(\vartheta,\vartheta_1)|\leqslant C_1|\vartheta|^{1/2}|L^{1/2}\vartheta|^{1/2}|L^{1/2}\vartheta_1|^{1/2}|L\vartheta_1|^{1/2},\quad \forall\vartheta,\vartheta_1\in D(L),\tag{16}$$

$$|B_1(\vartheta,\vartheta_1)|\leqslant C_2|L^{1/2}\vartheta|^{1/2}|L^{1/2}\vartheta_1|^{1/2},\quad \forall\vartheta,\vartheta_1\in D(L);\tag{17}$$

A 满足下面性质之一

$$|A\vartheta|\leqslant C_3|L^{1/2}\vartheta|,\qquad \forall\vartheta\in D(L),\tag{18}$$

$$|A\vartheta|\leqslant C_4|L^{1/2}\vartheta|^{1/2}|L\vartheta|^{1/2},\quad \forall\vartheta\in D(L);\tag{19}$$

另外, B, B_1, A 还有如下连续性质:

$$|L^{1/2}B(\vartheta,\vartheta_1)|\leqslant C_5|L\vartheta||L\vartheta_1|,\qquad \forall\vartheta,\vartheta_1\in D(L),\tag{20}$$

$$|L^{1/2}B_1(\vartheta,\vartheta_1)|\leqslant C_6|L\vartheta|^{1/2}|L\vartheta_1|^{1/2},\quad \forall\vartheta,\vartheta_1\in D(L),\tag{21}$$

$$|L^{1/2}A\vartheta|\leqslant C_7|L\vartheta|,\qquad \forall\vartheta\in D(L).\tag{22}$$

以上 $C_i(i=1,\cdots,7)$ 均为正常数. 另外, 设 $A+L$ 是正定的, 即存在常数 $C_8>0$,

$$((A+L)\vartheta,\vartheta)\geqslant C_8|L^{1/2}\vartheta|^2,\quad \forall\vartheta\in D(L),\tag{23}$$

如果 A 是反伴的, 即

$$(A\vartheta,\vartheta)=0,\quad \forall\vartheta\in D(L),\tag{24}$$

则(23) 显然成立, 当然上面可以不限定 A 是反伴算子.

2.2 全局吸引子

考虑(3) 式的初值问题, 即(3) 式有初始条件:

$$\vartheta(0)=\vartheta_0\in \mathrm{H}.\tag{25}$$

设初值问题(3) 和(23) 存在唯一解 $S(t)\vartheta_0\in D(L)$, $\forall t\in \mathrm{R}^+$, 映射 $S(t)$ 具备通常的半群性质.

由前面所述算子的性质有

引理 1 对任何初值 $\vartheta_0\in\mathrm{H}$, 存在依赖于 λ_1, $|f|$, $|L^{1/2}f|$ 的 ρ_0, ρ_1, ρ_2, 满足

$$\lim_{t\to+\infty}\sup|\vartheta(t)|^2\leqslant\rho_0^2,\tag{26}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup|L^{1/2}\vartheta(t)|^2\leqslant\rho_1^2,\tag{27}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup|L\vartheta(t)|^2\leqslant\rho_2^2.\tag{28}$$

由引理 1 知(3) 式的任何解在某个时间之后 $t\geqslant\tau>0$ 分别进入球:

$$B_0=\{\vartheta\in\mathrm{H},\ |\vartheta|\leqslant2\rho_0\},\tag{29}$$

$$B_1=\{\vartheta\in D(L^{1/2}),\ |L^{1/2}\vartheta|\leqslant2\rho_1\},\tag{30}$$

$$B_2=\{\vartheta\in D(L),\ |L\vartheta|\leqslant2\rho_2\}.\tag{31}$$

于是有

定理 1 演化方程(3) 存在一个全局吸引子 $\mathscr{A}$, 它是 B_2 的极限集, 即

$$\mathscr{A}=\omega(B_2)=\bigcap_{s\geqslant0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)B_2},\tag{32}$$

(其中闭包取在 H 上), 且有

$$\mathscr{A}\subseteq B_2\cap B_1\cap B_0.\tag{33}$$

2.3 惯性流形

利用文献[14] 的截断技巧来讨论方程(3) 的惯性流形. 设 $\theta(s)$ 为 $\mathrm{R}^+\to[0,1]$ 上的光滑函

数

$$\begin{cases} \theta(s)=\begin{cases}1, & s\in[0,1];\\ 0, & s\geqslant 2;\end{cases} \\ |\theta'(s)|\leqslant 2, \quad s\geqslant 0\end{cases} \tag{34}$$

固定 $\rho=2\rho_2$, 定义

$$\theta_\rho(s)=\theta(s/\rho),\quad s\geqslant 0, \tag{35}$$

则(3)式的截断方程为

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}+L\vartheta+F(\vartheta)=0, \tag{36}$$

其中 $F(u)=\theta_\rho(|L\vartheta|)R(\vartheta)$. 显然, 当 $|L\vartheta|\leqslant\rho$ 时, $\theta_\rho(|L\vartheta|)=1$, 这时(36)式与(3)式是一致的. 当 $|L\vartheta|\geqslant 2\rho$ 时, $\theta_\rho(|L\vartheta|)=0$, 此时对(36)式两边与 $L^2\vartheta$ 做内积, 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|L\vartheta|^2+\lambda_1|L\vartheta|^2\leqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|L\vartheta|^2+\lambda_1|L^{3/2}\vartheta|^2\leqslant 0. \tag{37}$$

所以在 $D(L)$ 中轨线 $\vartheta(t)$ 按指数速率收敛于半径 $\rho_3\geqslant 2\rho$ 的球中.

令 $p(t)=P\vartheta$, $q(t)=Q\vartheta$, 则 p, q 在 PH 和 QH 上满足

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Lp+PF(\vartheta)=0, \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Lq+QF(\vartheta)=0, \tag{39}$$

其中 $\vartheta=p+q$, 惯性流形 $M_I=\mathrm{Graph}(\Phi)$, 即它是由 Lipschitz 映射 Φ: $PD(L)\to QD(L)$ 的图构造得到的. 映射 Φ 是在函数类空间 $\mathrm{H}_{b,l}$ 的不动点得到. 函数类空间 $\mathrm{H}_{b,l}$ 的定义如下:

定义 2　$H_{b,l}$ 是 Lipschitz 映射 Φ: $PD(L)\to QD(L)$ 所构造的函数空间, 满足

(ⅰ) $|L\Phi(p)|\leqslant b$, $b>0$ 待定, $p\in PD(L)$;　(40)

(ⅱ) $|L\Phi(p_1)-L\Phi(p_2)|\leqslant l|Lp_1-Lp_2|$, $l>0$, $p_1, p_2\in PD(L)$;　(41)

(ⅲ) $\mathrm{supp}\,\Phi\subseteq\{p\in PD(L)\,|\,|Lp|\leqslant 4\rho\}$.　(42)

引入距离

$$\|\Phi_1-\Phi_2\|=\sup_{p\in D(l)}|L\Phi_1(p)-L\Phi_2(p)|, \tag{43}$$

则 $\mathrm{H}_{b,l}$ 是一个完备度量空间.

对于 $\Phi\in\mathrm{H}_{b,l}$ 定义 $PD(L)$ 上的惯性映射 T:

$$T\Phi(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\tau LQ}QF(\vartheta)\,\mathrm{d}\tau,\quad p_0\in PD(L), \tag{44}$$

其中 $\vartheta(\tau)=p(\tau;\Phi,p_0)+\Phi(p(\tau;\Phi,p_0))$, $p(\tau;\Phi,p_0)$ 是(36)式满足初值 $p(\tau;\Phi,p_0)=p_0$ 的解. 于是, 对方程(3)有[1)]

定理 2　设算子 A, B, B_1, L 满足(8)~(16), (20)~(23)及(18)或(19)式, $0<l<1/8$, 且存在常数 N_0, K_1, K_2(它们依赖于 l 和初值), 使 $N\geqslant N_0$, $\lambda_{N+1}\geqslant K_1$, $\lambda_{N+1}-\lambda_N\geqslant K_2$, 则存在 $b>0$, 使

(ⅰ) T 映射 $\mathrm{H}_{b,l}$ 为 $\mathrm{H}_{b,l}$;

1) 李建平. 大气和海洋动力学方程组的定性理论及其应用. 兰州大学博士学位论文, 1997. 209

(ⅱ) T 在 $H_{b,l}$ 中有一个不动点;

(ⅲ) $M_l = \mathrm{Graph}(\Phi)$ 是(3)式的惯性流形;

(ⅳ) M_l 含有(3)式的全局吸引子.

3 大气方程组的惯性流形

3.1 方程描述

在(λ, θ, p)坐标下, 大尺度大气运动方程组为[1~3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u + \left(2\Omega\cos\theta + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{a}u\right)v + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} + L_1 u = 0, \tag{45}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda v - \left(2\Omega\cos\theta + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{a}u\right)u + \frac{1}{a}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + L_1 v = 0, \tag{46}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial p} + \frac{R}{p}T = 0, \tag{47}$$

$$\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{\partial v\sin\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0, \tag{48}$$

$$\frac{R^2}{C^2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{R^2}{C^2}\Lambda T - \frac{R}{p}\omega + L_2 T = \frac{R^2}{C^2}\frac{\varepsilon}{C_p}, \tag{49}$$

其中

$$\Lambda = \frac{u}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\theta} + \omega\frac{\partial}{\partial p},$$

$$L_i = -\frac{\partial}{\partial p}l_i\frac{\partial}{\partial p} - \mu_i\Delta^2, \quad (i = 1, 2),$$

$$l_i = \upsilon_i(gp/R\overline{T})^2, \quad (i = 1, 2),$$

$$\Delta^2 = \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2},$$

$$C^2 = R^2\overline{T}(\gamma_d - \gamma)/g,$$

$\overline{T} = \overline{T}(p)$为等 p 面上的平均值, T 为相对于$\overline{T}$ 偏差, ϕ 为相对于$\overline{\phi}$ 偏差, ε 对大气的非绝热加热, 其余符号是通常用的. 方程的求解区域为 $\Omega = S^2\times(p_0, P_s)$, $0 < p_0 < P_s < \infty$, 其中 p_0 是某个任意小的正数, P_s 为地面气压, 边界条件为:

在大气压顶 $p = p_0$ 上,

$$(\partial u/\partial p, \partial v/\partial p, \omega, \partial T/\partial p) = 0; \tag{50}$$

在地面 $p = P_s$ 上,

$$u = v = \omega = 0, \tag{51}$$

$$\partial T/\partial p = \alpha_s(T_s - T), \tag{52}$$

其中 T_s 为地表面上的温度, α_s 是与湍流导热率有关的参数, 下面仅讨论(52)式为齐次情形, 即

$$\partial T/\partial p = -\alpha_s T. \tag{53}$$

对于非齐次情形, 可以利用将其齐次化来讨论. 由于不考虑地形, 因此, $\phi(\lambda, \theta, P_s) = 0$.

初始条件为:

$$(u, v, T)\big|_{t=0} = (u^{(0)}, v^{(0)}, T^{(0)}). \tag{54}$$

由(48)式及边界条件知：

$$\omega(\lambda, \theta, p) = -\int_p^{P_s}(\partial\omega/\partial p)\,dp = -\int_p^{P_s}((\partial u/\partial\lambda + \partial v\sin\theta/\partial\theta)/a\sin\theta)\,dp. \tag{55}$$

同理, 有

$$\phi(\lambda, \theta, p) = -\int_p^{P_s}(\partial\phi/\partial p)\,dp = -\int_p^{P_s}(RT/p)\,dp. \tag{56}$$

方程组(45)～(49)实质是关于 u, v, T 三个变量的方程, 即方程(45)、(46)和(49), 其中的 ω, ϕ 由(55)和(56)式给出. 因此, 引入向量函数

$$\vartheta = (u, v, (R/C)T)^{\mathrm{T}}, \tag{57}$$

则方程(45)～(49)可写成如下的算子方程：

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + R(\vartheta) + L\vartheta = 0, \tag{58}$$

其中

$$R(\vartheta) = B(\vartheta)\vartheta + B_1(\vartheta)\vartheta + A\vartheta - \xi, \tag{59}$$

$$L = \mathrm{diag}(L_1, L_1, C^2L_2/R^2), \tag{60}$$

$$B(\vartheta) = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & u\,\mathrm{ctg}\,\theta/a & 0 \\ -u\,\mathrm{ctg}\,\theta/a & \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_1 \end{bmatrix}, \tag{61}$$

$$B_1(\vartheta) = \mathrm{diag}\left(\omega\frac{\partial}{\partial p}, \omega\frac{\partial}{\partial p}, \omega\frac{\partial}{\partial p}\right), \tag{62}$$

A 为线性算子

$$A\vartheta = \left(fv + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}, -fu + \frac{1}{a}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, -\frac{C}{p}\omega\right)^{\mathrm{T}}, \tag{63}$$

$$(A\vartheta_1, \vartheta_2) = \int_\Omega\left[\left(fv_1 + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right)u_2 + \left(-fu_1 + \frac{1}{a}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right)v_2 + \left(-\frac{R}{p}\omega_1\right)T_2\right]d\Omega, \tag{64}$$

这里 ω, ϕ 由(55)式及(56)式给出, 即

$$\omega_i(\lambda, \theta, p) = -\int_p^{P_s}((\partial u_i/\partial\lambda + \partial v_i\sin\theta/\partial\theta)/a\sin\theta)\,dp \quad (i = 1, 2),$$

$$\phi_i(\lambda, \theta, p) = -\int_p^{P_s}(RT_i/p)\,dp \quad (i = 1, 2),$$

$$\Lambda_1 = \frac{u}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{65}$$

$$\xi = (0, 0, R\varepsilon/(CC_p))^{\mathrm{T}}. \tag{66}$$

本文讨论非绝热加热 ε 为给定的定常情形, 此时初边值问题(45)～(54)存在唯一解[5], 因此初值为 $\vartheta(0) = \vartheta_0$ 的算子方程(58)定义了一个半群算子 $S(t)$.

3.2　算子的性质

令 H 为 Hilbert 空间(下面均取 $H = L_2(\Omega)$), $D(L)$ 是对应于边界条件(50), (51), (53)(记它们为 $D_{\partial\Omega}$)的算子 L 的定义域, 则 $D(L) = \{\vartheta \mid \vartheta \in C^\infty(\Omega), D_{\partial\Omega}\}$, 且 $D(L)$ 是一线性稠密集

合.

引理 **2** 算子 L 是对称的, 即

$$(L\vartheta_1, \vartheta_2) = (\vartheta_1, L\vartheta_2), \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in D(L). \tag{67}$$

引理 **3** 算子 L 是自共轭的.

易证, 当 $\vartheta \in D(L)$时, 有

$$(L\vartheta, \vartheta) \geqslant 0. \tag{68}$$

更进一步, 有存在常数 C_1, $C_2 > 0$, 使得

$$(L\vartheta, \vartheta) \geqslant C_1 \| \vartheta \|_1, \tag{69}$$

$$(L\vartheta, \vartheta) \geqslant C_2 \| \vartheta \|_0. \tag{70}$$

其中

$$\| \vartheta \|_1 = (\| u \|^2_{H^1} + \| v \|^2_{H^1} + \| T \|^2_{H^1})^{1/2}, \tag{71}$$

$$\| \vartheta \|_0 = (\| u \|^2 + \| v \|^2 + \| T \|^2)^{1/2}, \tag{72}$$

这里 $\| \circ \|_{H^1}$取 $H^1(\Omega)$ 中范数, $\| \circ \|$ 取 $L_2(\Omega)$ 中范数. 因此, 有

引理 **4** 算子 L 是正定算子, 即存在常数 $C > 0$, 使得

$$(L\vartheta, \vartheta) \geqslant C(\vartheta, \vartheta), \quad \forall \vartheta \in D(L), \tag{73}$$

其中等号当且仅当 $\vartheta = 0$ 时成立.

由以上分析知, L 是自伴正定的线性算子, 因此在 $D(L)$ 上又引入新的内积

$$(\vartheta_1, \vartheta_2) = (L\vartheta_1, \vartheta_2). \tag{74}$$

由此诱导出的新范数为

$$\| \vartheta \|_1 = (\vartheta, \vartheta)^{1/2}_1 = (L\vartheta, \vartheta)^{1/2}, \quad \vartheta \in D(L). \tag{75}$$

按此模取 $D(L)$ 的闭包, 得到一个新的完备的 Hilbert 空间. 显然, 由这个空间的构造知道, $D(L)$ 在 H_1 中稠密. 由算子 L 的正定性知,

$$\| \vartheta \|_0 \leqslant C^{-1} \| \vartheta \|_1, \quad \vartheta \in D(L). \tag{76}$$

于是, 可建立空间 H_1 与空间 H 的某一子集之间的一一对应关系. 这样, 把 H_1 嵌入到 H.

更一般地, 令 L^s 表示 L 的 s 次幂($s \in \mathrm{R}$), 空间 $H_{2s} = D(L^s)$ 是具备如下内积的 Hilbert 空间:

$$(\vartheta_1, \vartheta_2)_{2s} = (L^s\vartheta_1, L^s\vartheta_2), \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in D(L^s), \tag{77}$$

$\vartheta \in H_s$, 另外,

$$\| \vartheta \|_s = (\vartheta, \vartheta)^{1/2}_s. \tag{78}$$

引理 **5** 算子 L 的逆算子 L^{-1}是紧算子.

证明: $\forall f \in H$, 则 $L\vartheta = f$ 在 $D(L)$ 中存在唯一解 $\vartheta = L^{-1} f$, 再由

$$\| \vartheta \|^2 \leqslant C(L\vartheta, \vartheta) = C(f, \vartheta),$$

可有

$$\| \vartheta \| \leqslant C^* \| f \|. \tag{79}$$

故 L^{-1}是 $H \to H_1$ 线性有界算子. 又 H_1 到 H 嵌入是紧的, 所以 L^{-1}是紧算子.

由于 L 是自伴的, L^{-1}也是自伴的, 故 L^{-1}是自共轭紧算子. 于是存在 H 的正交完备基 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$和可数个正数 $\lambda_j > 0$, $\lambda_j > \lambda_{j+1}$, 有

$$L^{-1}w_j = \lambda w_j \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{80}$$

记 $\lambda_j = \lambda_j^{-1}$, 则有

$$Lw_j = \lambda_j w_j,\ w_j \in D(L)\ (j = 1, 2, \cdots), \tag{81}$$

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \lambda_{j+1} \leqslant \cdots, \tag{82}$$

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty. \tag{83}$$

这样算子 L 具有性质(11) ~(14) .

对于算子 B, B_1, A 有

引理 6

$$(B(\vartheta, \vartheta_1) + B_1(\vartheta, \vartheta_1), \vartheta_1) = 0, \tag{84}$$

$$(A\vartheta, \vartheta) = 0. \tag{85}$$

令

$$B(\vartheta, \vartheta_1) = B(\vartheta)\vartheta_1, \tag{86}$$

$$B_1(\vartheta, \vartheta_1) = B_1(\vartheta)\vartheta_1, \tag{87}$$

则 $B(\vartheta, \vartheta_1)$, $B_1(\vartheta, \vartheta_1)$ 均为 $D(L)\times D(L)\to$H 上的双线性算子．根据 Holder 不等式及 Sobolev 插入不等式, 有

引理 7　存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$|B(\vartheta, \vartheta_1)| \leqslant C_1 \|\vartheta\|_0^{1/2} \|\vartheta\|_1^{1/2} \|\vartheta_1\|_1^{1/2} \|\vartheta_1\|_2^{1/2}, \tag{88}$$

其中

$$\|\vartheta_1\|_2 = (\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|T\|_2^2)^{1/2}. \tag{89}$$

根据 Friedrichs 不等式有

$$\|\omega\| \leqslant K_1 \|\partial\omega/\partial p\|, \tag{90}$$

其中常数 $K_1 > 0$．再由 Minkowski 不等式有

$$\|\omega\| \leqslant K_1(|u|_1 + |v|_1), \tag{91}$$

同样有,

$$\|\phi\| \leqslant K_2 \|\partial\phi/\partial p\|, \tag{92}$$

$$\|\phi\| \leqslant K_2 \|RT/C\|. \tag{93}$$

其中常数 $K_2 > 0$．再根据 Schwarz 不等式有

引理 8　存在常数 k, $K > 0$ 有

$$|B_1(\vartheta, \vartheta_1)| \leqslant k \|\vartheta\|_1 \|\vartheta_1\|_1, \tag{94}$$

$$|A\vartheta| \leqslant K \|\vartheta\|_1. \tag{95}$$

3.3　惯性流形

根据引理 2 ~8 知, 方程(58) 中的算子满足方程(3) 中的算子所具有的性质, 因此引理 1 成立, 且当谱间断条件被满足时, 定理 2 对方程(58) 成立．这说明, 在这样的条件下, 大气运动方程组(45) ~(49) , 存在全局吸引子 $\mathscr{A}$ 和惯性流形 M_I, 其全局吸引子 $\mathscr{A}$ 在 M_I 上, M_I 以指数速率吸引方程组(45) ~(49) 的所有解轨道.

4 小结

本文首先讨论了一类非线性演化方程的全局吸引子和惯性流形, 然后证明大气方程组即是这类非线性演化方程, 从而在耗散算子满足谱间断的条件下得到大气方程组惯性流形的存在. 由于惯性流形是指数吸引方程解的不变的光滑流形, 这就为深入了解全局吸引子的动力结构和特性提供了基础. 此外, 还可以利用惯性流形的存在来设计性能良好的数值格式, 为逼真的模拟大气长时间变化提供保证. 如果设计的离散化数值格式也存在惯性流形 $M_{\tau I}$(其中 τ 为时间步长), 而且当 $\tau\to 0$ 时, $M_{\tau I}\to M_I$, 则表明这种数值格式是能够模拟出原方程解的长期行为, 是比较好的. 关于此我们将另文报道.

参 考 文 献

1 丑纪范. 初始场作用的衰减与算子的特征. 气象学报, 1983, 41(4): 385~392
2 丑纪范. 长期数值天气预报. 北京: 气象出版社, 1986. 51~95
3 丑纪范. 大气动力学的新进展. 兰州: 兰州大学出版社, 1990. 37~47
4 Chou Jifan. Some general properties of the atmospheric model in H space, R space, point mapping, cell mapping. In: Proceedings of International Summer Colloquium on Nonlinear Dynamics of the Atmosphere. Beijing: Science Press, 1986. 187~189
5 汪守宏, 黄建平, 丑纪范. 大尺度大气运动方程组解的一些性质. 中国科学, B 辑, 1989, 19(3): 328~336
6 丑纪范. 大气动力学方程组的全局分析. 北京气象学院学报, 1995, (1): 1~12
7 丑纪范. 大气动力学的若干进展和趋势. 现代大气科学前沿与展望. 北京: 气象出版社, 1996. 71~75
8 李建平, 丑纪范. 非定常外源强迫下大气方程组解的性质. 科学通报, 1995, 49(13): 1 207~1 209
9 李建平, 丑纪范. 大气吸引子的存在性. 中国科学, D 辑, 1997, 27(1): 89~96
10 Li Jianping, Chou Jifan. Effects of external forcing, dissipation and nonlinearity on the solutions of atmospheric equations. Acta Meteor Sin, 1997, 11(2): 57~65
11 Li Jianping, Chou Jifan. Further study on the properties of operators of atmospheric equations and the existence of attractor. Acta Meteor Sin, 1997, 11(2): 216~223
12 李建平, 丑纪范. 湿大气方程组解的渐近性质. 气象学报, 1998, 56(2): 187~198
13 李建平, 丑纪范. 大气动力学方程组的定性理论及其应用. 大气科学, 1998, 21(4): 443~453
14 Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. J Diff Eqa, 1988, 73: 309~353
15 Constantin P, Foias C, Temam R. Attractors representing turbulent flows. Memoirs Amer Math Soc USA, 1985. 314
16 郭柏灵. 非线性演化方程. 上海: 上海科技教育出版社, 1995. 183~343