大气动力学方程组简化的算子约束法

李建平[①]　丑纪范[②]

(①中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学国家重点实验室(LASG), 北京 100029; ②兰州大学大气科学系, 兰州 730000. Email: ljp@lasg.iap.ac.cn)

摘要　根据大气动力学方程组的定性理论提出一种新的简化方程组的方法, 即算子约束法. 讨论了该方法遵循的一般原则及其在数学上的严格性, 给出如何利用它来实现合理简化、得到动力关系协调一致的简化方程组的途径.

关键词　简化　算子方程　算子　算子约束法

大气动力学方程组是非常复杂的非线性、非定常、可压缩、有耗散和有外源的偏微分方程组[1~4], 它描述了发生在整个大气圈内的各种时空尺度的运动. 在给定的适当的初边值条件

下, 要求得其解析解, 目前看来有着无法逾越的困难. 因为大气中特定时空尺度系统的运动有其特殊性, 所以, 对于具体的运动型式, 应抓住其主要因素, 略去次要因素, 从而将方程简化. 这样不仅有利于数学处理, 而且突出了运动的本质, 抓住了问题的核心.

自 20 世纪 40 年代发展并逐步完善起来的尺度分析是现在简化方程组的一个主要的、广泛采用的却带有半经验性质的方法[1~7]. 这种方法假定出现在同一个方程式里的各项并不具有同等的重要性, 因而利用估计各项的数量级的大小略去小项的原则使方程得到简化. 尺度分析法在简化方程组时有一个明显的不足就是只就同一个方程式各项数量级进行比较, 而不顾及原方程组中方程与方程之间的联系, 从而简化后的方程组就有可能不具有原方程组的协调关系, 得到不协调的方程组. 应用这种方法简化方程组, 有时可以发现同一个项在某个方程里被认为是次要的而略去, 但在另一个方程式里要保留下来. 这在物理意义上是难以说清的, 从而这种半经验的理论分析法所得的结果是比较粗略的、不严格的[2~7]. 因此, 为了不破坏系统原有的属性, 就需要结合其他约束方法. 能量约束法[8]就是其中有效的且物理意义清晰的方法. 不过, 能量约束法只是针对绝热无摩擦系统进行的.

为了弥补尺度分析法的不足, 得到动力关系协调一致的简化方程组, 本文提出一种算子约束法. 这种方法是能量约束法的拓广, 它从大气系统本质上是耗散的特征出发, 利用大气动力学方程组的定性理论[9~19] 1), 遵循简化前后方程中相应算子的性质保持不变的准则, 从而可望得到不歪曲原方程本质属性的简化方程.

1 算子约束法的一般原则

完整的大气动力学方程组可化为如下等价的算子方程[17~19]:

$$\frac{\partial j}{\partial t} + N(j)j + L(j)j = x, \tag{1}$$

其中向量函数 $j = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{r},\tilde{T})^{\mathrm{T}}$, $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{r},\tilde{T})^{\mathrm{T}} = r^*(u^*,v^*,w^*,j^*,T^*)^{\mathrm{T}}$, $u^* = u/\sqrt{2}$, $v^* = v/\sqrt{2}$, $w^* = w/\sqrt{2}$, $j^* = \sqrt{j}$, $r^* = \sqrt{r}$, $T^* = \sqrt{C_{\mathrm{V}}\hat{T}} = \sqrt{C_{\mathrm{V}}T}$, 这里 u, v 和 w 分别是纬向、经向和垂直速度, r 和 T 分别是空气密度和温度, j 是重力位势, C_{V} 为等容比热. $N(j)$ 和 $L(j)$ 的具体形式见文献[17, 18]和李建平的论文 1). $N(j)$ 代表旋转流体的平流、地转偏向力、气压梯度力、重力、地球的球面效应等的作用, $L(j)$ 则概括了黏性耗散项的作用. 从最普遍的意义上说, 抽象算子 $N(j)$ 是反伴的、反对称的算子, $L(j)$ 是自共轭、对称的正算子, 即

$$N(j) = -N^*(j), \quad (N(j)j_1,\ j_2) = -(j_1,\ N(j)j_2), \quad (N(j_1)j,\ j) = 0;$$

$$L(j) = L^*(j), \quad (L(j)j_1,\ j_2) = (j_1,\ L(j)j_2), \quad (L(j)j,\ j) \geqslant 0.$$

$\forall j, j_1, j_2 \in H_0(\grave{U})$, $H_0(\grave{U})$ 是一个装备了如下内积和范数的完备的 Hilbert 空间,

$$(j_1, j_2) = \int_{\grave{U}} j_1' j_2 \,\mathrm{d}\grave{U} = \int_0^{2\eth}\int_0^{\eth}\int_{r_s}^{r_\infty} j_1' j_2 r^2 \sin q \,\mathrm{d}r\mathrm{d}q\,\mathrm{d}l ,$$

$$\| j \|_0 = (j\ , j)^{1/2}.$$

1) 李建平. 大气和海洋动力学方程组的定性理论及其应用. 兰州大学博士学位论文, 1997

$N(j)$和$L(j)$的性质蕴含的物理意义是，$N(j)$代表了系统中各种可逆能量守恒过程，$L(j)$代表了系统中不可逆的能量耗散过程. 因此，对于简化的方程，其中的算子应保持$N(j)$，$L(j)$的性质不变，从而保证了原方程最基本的物理性质不会被破坏，这就是简化方程组的算子约束方法. 设简化后的方程为

$$\frac{¶j}{¶t}+\tilde{N}(j)j+\tilde{L}(j)j=x. \tag{2}$$

根据上述原则，简化后的算子$\tilde{N}(j)$应是反伴算子，$\tilde{L}(j)$应是自伴正算子. 我们可以证明方程(2)和(1)有相同的渐近性质. 这说明，按照这种原则简化的方程组不会有虚假的源或汇，仍然存在全局吸引子，仍然是“耗散结构”，没有破坏原方程解的渐近性态，并能保持原方程的整体性质及物理规律. 因此，按照算子约束原则简化的方程仍然是十分严格的，其动力关系是协调一致的. 比如说大尺度大气方程[9~11, 18]

$$\frac{¶Bj}{¶t}+N_l(j)j+L_l j=x, \tag{3}$$

其中算子$N_l(j)$和L_l就没有破坏$N(j)$和$L(j)$的性质(算子$N_l(j)$和L_l的具体形式参见文献[8~11, 18]), (3)和(1)式有相同的长期行为，因而简化就是合理的.

2 算子 N 的简化

由前面的讨论知，$N(j)$是反对称算子，那么简化后的算子$\tilde{N}(j)$也应如此.

令n_{ij}是算子$N(j)$中的某一项，n_{ij}是n_{ij}的反对称项. 针对所考虑的问题和研究对象的性质，如果认为n_{ij}是不重要的，是可以略去的，那么为了不破坏算子$N(j)$的反对称性，则n_{ij}项也应略去. 否则，就会有虚假的“源”或“汇”产生，从而破坏原系统的基本属性. 下面的分析先不考虑耗散和外源，即绝热无摩擦，则(1)式为

$$\frac{¶j}{¶t}+N(j)j=0, \tag{4}$$

与j作内积，立得能量守恒性质，即

$$\|j(t)\|=\|j_0\|. \tag{5}$$

对于(4)式的任何简化方程

$$\frac{¶\tilde{j}}{¶t}+\tilde{N}(\tilde{j})\tilde{j}=0, \tag{6}$$

若$\tilde{N}(\tilde{j})$仍保持算子$N(j)$的反伴性，则(6)式与j作内积立得简化的方程(6)亦具有能量守恒

$$\|\tilde{j}(t)\|=\|\tilde{j}_0\|. \tag{7}$$

这说明(6)式未破坏原方程(4)能量守恒的性质. 若$\tilde{N}$不保持N的反伴性，则可以证明这种简化破坏了(4)式的能量守恒的性质. 李建平 1)给出了许多具体的例子，如正压无辐散模式、线性正压模式、浅水波模式、p坐标原始方程模式等等都满足上面的原则. 此外，还给出了由尺度分析原则所得到的两个不适当简化的例子，因为它们破坏了上述性质 1).

由上面的分析可知，能量约束法是算子约束法的一个特例，而且在简化过程中算子约束法比能量约束法简洁明了.

1) 见 2105 页脚注

3　算子 L 的简化

算子 $L(j)$ 是对称正算子，简化后的算子 $\tilde{L}(j)$ 也应是如此.

令 l_{ij} 是 $L(j)$ 中的某一项，l_{ji} 是 l_{ij} 的对称项. 若略去 l_{ij} 项，就必须略去 l_{ji} 项. 否则，就破坏了 $L(j)$ 是对称非负性，从而歪曲原系统的物理属性. 下面讨论经常所作的两个简化. 以下边界条件可以是有地形，也可以是无地形[16~18]1).

通常在考虑耗散时，由于湍流黏性力比分子黏性力大得多，从而在运动方程中略去分子黏性. 略去分子黏性后，算子 $L(j)$ 变成为

$$\tilde{L}(j)=\begin{bmatrix}-l & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -l & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -l & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_5\end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中 l, l_5 分别为

$$l=\frac{1}{r^* r\sin q}\frac{\P}{\P l}\frac{k_l}{r\sin q}\frac{\P}{\P l}\frac{1}{r^*}+\frac{1}{r^* r\sin q}\frac{\P}{\P q}\frac{k_q\sin q}{r}\frac{\P}{\P q}\frac{1}{r^*}+\frac{1}{r^* r^2}\frac{\P}{\P r}k_r r^2\frac{\P}{\P r}\frac{1}{r^*},$$

$$l_5=\frac{1}{r^* r\sin q}\frac{\P}{\P l}\frac{K_l}{r\sin q}\frac{\P}{\P l}\frac{1}{r^*}+\frac{1}{r^* r\sin q}\frac{\P}{\P q}\frac{K_q\sin q}{r}\frac{\P}{\P q}\frac{1}{r^*}$$
$$+\frac{1}{r^* r^2}\frac{\P}{\P r}K_r r^2\frac{\P}{\P r}\frac{1}{r^*}-C_K a_S T_S/2\tilde{T}^2,$$

式中 k_l, k_q 和 k_r 分别为水平和垂直方向上的湍流黏性系数; K_l, K_q 和 K_r 分别为水平和垂直方向上的湍流导热系数. 不难证明，略去分子黏性保留湍流黏性力后的 $\tilde{L}(j)$ 和原 $L(j)$ 具有同样的性质. 因此，这种做法是适当的.

在略去分子黏性后，通常又认为水平方向上的湍流黏性比垂直方向上的湍流黏性小得多，所以又略去水平方向上的湍流黏性. 这种简化对不对呢'…'我们来做一分析. 略去了水平方向上的湍流黏性后，$L(j)$ 变成如下形式…:

$$\tilde{L}(j)=\begin{bmatrix}-\tilde{l} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\tilde{l} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\tilde{l} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{l}_5\end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中

$$\tilde{l}=\frac{1}{r^* r^2}\frac{\P}{\P r}k_r\frac{\P}{\P r}\frac{1}{r^*}, \tag{10}$$

$$\tilde{l}_5=\frac{1}{r^* r^2}\frac{\P}{\P r}K_r\frac{\P}{\P r}\frac{1}{r^*}-C_K a_S T_S/2\tilde{T}^2 . \tag{11}$$

可以证明

$$\left(\tilde{L}(j)j_1, j_2\right)=\left(\tilde{L}(j)j_2,\ j_1\right), \tag{12}$$

即 $\tilde{L}(j)$ 有对称性. 那么, 是否有

$$\left(\tilde{L}(j)j,\ j\right) \geqslant 0, \tag{13}$$

回答是肯定的. 但要证明(13)式必须引入新的 Hilbert 空间, 即 $\tilde{H}_1(\grave{U})$, 它是如下范数下的完备化空间:

$$\|j\|_1 = \left(\left|\tilde{u}\right|_1^2 + \left|\tilde{v}\right|_1^2 + \left|\tilde{w}\right|_1^2 + \left|\tilde{r}\right|_0^2 + \left|\tilde{T}\right|_1^2\right)^{1/2}, \tag{14}$$

其中 $\left|\ \cdot\ \right|_1$ 取 Hilbert 空间 $V(\grave{U})$ 中的范数, $V(\grave{U})$ 是如下范数下的完备化空间:

$$\left|f\right|_1 = \left(\int_{\grave{U}}\left[f^2 + \left(\frac{\P f}{\P r}\right)^2\right]\mathrm{d}\grave{U}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

这样就可以证明(13)式. 这说明简化虽然使得状态空间发生了改变, 但算子的性质应保持不变, 从而可以保证简化的方程在解的定性上不会改变原方程的演变规律.

4 小结

在大气动力学的研究中, 为了解释某种观测到大气的现象, 不可避免地要遇到方程组简化的问题, 简化虽然改变了状态空间, 但算子的性质应保持不变, 这样就能保证各种简化不歪曲原系统最基本的物理定律和全局性质. 这就是本文提出的大气动力学方程组简化的算子约束原则. 根据讨论可知, 这种方法有严格的数学基础, 并具有明确的物理意义. 针对所研究的实际现象, 在简化方程组时, 利用尺度分析, 再加上算子约束, 就会得到动力关系协调一致的简化方程组, 从而利用简化方程可望对所研究的现象得到比较成功的解释. 需要注意的是, 要研究与大气长期过程有关的现象, 根据算子约束的原则, 简化后的系统应仍然是一个强迫耗散的非线性系统, 不是绝热无摩擦的, 不是线性的[11~19]1). 这样才能保证简化的方程组在定性上不会歪曲原系统的长期演变行为, 也才能得到比较好的结果.

致谢 本工作为中国科学院资源环境领域知识创新工程重要方向项目(项目编号: KZCX2-203)、国家重点基础研究发展规划项目“我国重大气候灾害和天气灾害形成机理和预测理论的研究” (批准号: G1998040900 Part I)、国家自然科学基金资助项目(批准号: 49735160, 49905007)、中国科学院大气物理研究所创新基金项目(批准号: 8-1301) 和中国科学院院长基金资助项目.

参 考 文 献

1 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷. 北京: 科学出版社, 1979
2 曾庆存. 一个可供现代数学分析研究的气候动力学模型. 大气科学, 1998, 22(4): 408~417
3 刘式适, 刘式达. 大气动力学, 上册. 北京: 北京大学出版社, 1991. 1~33, 167~184
4 廖洞贤, 王两铭. 数值天气预报原理及其应用. 北京: 气象出版社, 1986. 1~28
5 杨大升, 刘余滨, 刘式适. 动力气象学. 北京: 气象出版社, 1983. 82~99
6 Áå ë è í ñ ê è é Â À, 著. 动力气象, 下册. 仇永炎译. 北京: 高等教育出版社, 1959. 671~676
7 Holton J R. An Introduction to Dynamic Meteorology. New York: Academic Press, 1972. 1~40
8 Lorenz E N. Energy and numerical weather prediction. Tellus, 1960, 12: 364~373
9 丑纪范. 初始场作用的衰减与算子的特性. 气象学报, 1983, 41(4): 385~392
10 丑纪范. 长期数值天气预报. 北京: 气象出版社, 1986
11 汪守宏, 黄建平, 丑纪范. 大尺度大气运动方程组解的一些性质. 中国科学, B 辑, 1989, (3): 328~336
12 丑纪范. 大气动力学的新进展. 兰州: 兰州大学出版社, 1990. 37~47
13 Lions J L, Temam R, Wang S. Geostrophic asymptotics of the primitive equations of the atmosphere. Topological Methods

1) 见 2105 页脚注

in Nonlinear Analysis, Special Issue Dedicated to Jean Leray, 1994, 4: 253~287
14 Lions J L, Manley O, Temam R, et al. Physical interpretations of the attractor for a simple model of atmospheric circulation. Journal of Atmosphere Sciences, 1997, 54(9), 1137~1143
15 丑纪范. 大气动力学的若干进展和趋势, 现代大气科学的前沿与展望. 北京: 气象出版社, 1995. 71~75
16 李建平, 丑纪范. 大气吸引子的存在性. 中国科学, D 辑, 1997, 27(1): 87~96
17 Li J P, Chou J F. Further study on the properties of operators of atmospheric equations and the existence of attractor. Acta Meteor Sin, 1997, 11(2): 216~223
18 Li J P, Chou J F. The effects of external forcing, dissipation and nonlinearity on the solutions of atmospheric equations. Acta Meteor Sin, 1997, 11(1): 57~65
19 Temam R, Wang S. Mathematical problems in meteorology and oceanography. Bull Ame Meteorol Soc, 2000, 81(2): 319~321

(2000-05-09 收稿, 2000-07-20 收修改稿)