气候系统全局分析理论及应用

李建平[①②] 丑纪范[②③]

(①中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029; ②兰州大学大气科学系, 兰州 730000; ③中国气象局气象培训中心, 北京 100081. E-mail: ljp@lasg.iap.ac.cn)

摘要 简要概述了气候系统全局分析理论的思想和主要理论结果, 给出气候系统全局行为定理, 即气候动力学方程组存在全局吸引子, 随着时间的增长气候系统演化到全局吸引子上, 说明气候系统具有向外源强迫的非线性适应过程, 并指出强迫、耗散和非线性对系统长期行为的不同影响, 总结了全局分析理论现有的主要应用, 重点阐述了该理论在气候适应和演变过程、数值模式设计原则及最优数值计算三方面的应用成果.

关键词 气候系统 全局分析 全局吸引子 算子约束原则 计算不确定性原理

气候科学是当今国际上最普遍关注的重要科学之一, 也是一个热点研究领域[1,2], 这一点可由当今国际上著名的气候研究计划"气候变化和可预报性(CLIVAR)"得到充分的反映. 气候是一个物理系统, 它满足物理学的一般守恒原理, 如质量守恒、能量守恒、动量守恒、水物质守恒等等. 根据这些基本原理, 通过适当的数学描述可以把气候系统的演化用一组偏微分方程表述出来, 再根据系统所处的环境和历史状况, 确定出适当的初值和边值条件, 就构成了一组气候动力学方程组. 气候动力学理论、数值模拟和动力诊断研究都是围绕这组方程及其各种简化形式展开的[3~8]. 不过, 这是一组非常复杂的强迫耗散的非线性方程, 非线性以及与相变潜热相联系的复杂过程[9~13]是研究气候动力行为的两个基本的困难. 由于数学上缺乏有效处理这类系统的理论和方法, 因此传统的动力气候学要么采用线性理论, 要么局限在非线性保守系统的理论框架内. 这对于演变过程的时间尺度远大于能量耗散的时间尺度的气候系统来说有着不可克服的本质缺陷. 归根结底, 气候系统是与外界不断有能量交换的开放系统, 是"耗散结构". 因此, 当代气候动力学呼唤着新的动力学的基础理论——强迫耗散的非线性气候动力学[9~31].

气候系统演变的时间尺度较长, 因此用动力学理论揭示其长期演变的动力学性质和基本运动特征无疑是非常重要的, 这是气候动力理论中最基本的、最重要的研究课题之一, 不仅具有重要的理论意义, 也有重要的应用价值. 而这样一个研究课题从数学上说就是要了解系统解的全局渐近特征, 需要用微分方程全局定性理论来研究. 全局分析是研究系统所有可能的初值在任意长时间上的整体特征和全局行为, 特别是时间无穷时的终态情况. 虽说在数学上比较严格的提法是时间无穷时的情况, 但事实上在实际中并不需要这样一个限制的, 而是在确定的有限时间后就可达到的状态. 在了解全局特征方面, 传统的方法如求解析解的间接法、数值法及实验法都有无法克服的困难, 所以需要用全局分析的理论来研究. 全局分析是一种直接方法, 不需要求解, 直接通过方程本身的特征和性质来了解解的渐近性态; 它使用的手段是无穷维动力系统的理论和方法; 其目的是了解系统的终态具有的普遍特征、解释气候现象、阐明气候演变规律、设计新的数值格式和计算方法, 等等. 本文主要是总结一下我国学者在气候系统全局分析理论这一领域中的重要成果和新的发现以及一些主要应用成果.

1 全局分析理论的主要思想和理论结果

1.1 主要思想

如所知, 气候是复杂的物理系统, 其具体的运动形式是多种多样的, 其局部性质是五花八门的. 全局分析则是撇开气候系统中各种具体运动及其局部性质, 而研究其整体特征和全局行为. 这样不仅可以指出气候系统中各种物理量之间最本质的联系, 而且能够简明清晰地阐明外源强迫对气候运动的基本影响, 从而揭示出气候系统中最基本的运动规律. 在普遍运动规律的基础上来研究具体运动的特殊性, 指导具体的实践活动. 因此, 全局分析无论是对于气候动力学理论研究, 还是对于气候数值模拟和数值预

测研究都是十分重要的．全局分析要研究尽可能完整的气候动力学方程组全局特征，其原因之一是通过其理论结果来提供一种约束原则，该原则能保证各种简化和离散化不歪曲原系统最基本的物理定律．

全局理论分析的一般步骤是先将动力学方程组转化成 Hilbert 空间中等价的算子方程，通过算子的性质来讨论 Hilbert 空间中所有点出发的“轨线”之归宿及相关问题．

1.2 算子方程

无论是大气系统(干空气或湿大气，方程包括各种尺度运动、非准静力近似、非“薄层”大气近似、有地形动力作用及有内摩擦力)，还是海洋系统(方程取消薄壳近似、静力近似、不可压缩近似、包辛尼斯科近似，并包括海底地形动力作用，采用完整状态方程，即 $f(r, p, S, T)=0$)，无论是海-气耦合系统，还是海-陆-气耦合系统，都可以统一写成如下 Hilbert 空间中的算子方程[9~29]1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial j}{\partial t}+[N(j)+L(j)]j=x(j), \\ j\big|_{t=0}=j_0. \end{cases}$$

其中抽象算子 $N(j)$ 和 $L(j)$ 具有如下基本性质:

$$N(j)=-N^*(j),\quad (N(j)j_1, j_2)=-(j_1, N(j)j_2),$$
$$(N(j_1)j, j)=0;\quad L(j)=L^*(j),$$
$$(L(j)j_1, j_2)=(j_1, L(j)j_2),\quad (L(j)j, j)\geq 0.$$

$\forall j, j_1, j_2 \in H_0(W)$，$N^*(j)$ 和 $L^*(j)$ 分别是 $N(j)$ 和 $L(j)$ 的伴随算子，$H_0(W)$是一个装备了如下内积和范数的完备的 Hilbert 空间:

$$(j_1, j_2)=\int_W j_1' j_2 \mathrm{d}W=\int_0^{2ð}\int_0^{ð}\int_{r_s}^{r_\infty} j_1' j_2 r^2 \sin q \,\mathrm{d}r\mathrm{d}q\,\mathrm{d}l,$$
$$\|j\|_0=(j, j)^{1/2}.$$

算子 $N(j)$和 $L(j)$的上述性质所蕴含的基本物理意义是：前者代表了系统中各种可逆能量守恒过程，后者代表了系统中不可逆的能量耗散过程．算子 $N(j)$ 和 $L(j)$的性质集中反映了系统中两类基本物理属性所具有的截然不同物理过程的本质特征．

1.3 全局行为定理

全局分析理论证明[9~29]，气候动力学方程组(无论是定常外源强迫还是非定常外源强迫)存在全局吸引子，随着时间的增长，气候系统演化到全局吸引子上．不在吸引子上的状态只有暂态意义．全局吸引子具有有限的维数，代表了系统的终态，说明气候系统是“耗散结构”，具有向外源强迫的非线性适应过程．

全局行为定理表明，气候系统的长期行为可以用有限维动力系统精确描述．这就给出了气候作为无穷维系统可以用有限维动力系统进行数值模拟及预测的数理基础[9~29]．

1.4 强迫、耗散和非线性相互作用

全局分析理论结果证明非线性、耗散和外源强迫三者的共同作用是产生多平衡态的根源，即大气多平衡态是有耗散和外源相互作用的非线性机制[23]．

强迫、耗散和非线性对长期行为有本质不同作用．吸引子的存在是耗散系统的混沌与保守系统的混沌的根本不同点，外源强迫是维持有耗散系统活化的必要条件，耗散是有强迫系统保持整体稳化的必要条件，非线性是出现混沌的必要条件．所以，一个简化了的描述特定气候现象的动力学模式必须是一个强迫耗散的非线性发展方程，不是绝热无摩擦的，不是线性的[12,23]．

2 全局分析理论的主要应用概述

全局分析理论有较为广泛的应用，如在阐明气候系统的适应和演变过程、气候动力学方程组的简化、差分格式设计原则、非线性数值计算稳定性分析、最优数值计算、分解算法的分解原则、四维同化的实质解释、长期预报模式设计准则、优势模态的使用等等诸多方面都能找到具体的应用[9~32]．但限于篇幅，下面仅就它的 3 个重要应用给以说明．

3 气候系统的适应和演变

全局分析理论成果的一个重要结论就是揭示出气候系统作为强迫耗散的非线性系统具有向外源强迫的非线性适应过程这样一个重要性质，这种适应与过去气象动力学中所研究的适应如地转适应、旋转适应、位涡适应、静力适应等等有本质的不同，全局吸引子的存在是气候系统的适应与上述其他适应的根本区别．

根据全局行为定理可知，气候系统存在全局吸引子，全局吸引子外的任一状态必将吸引到全局吸引子上．全局吸引子包含在全局吸收集中，全局吸收集是一个有限半径的点集，在全局吸收集外的任何状态都会在有限的时间里吸收到其内，而其内的状态

1) 李建平．大气和海洋动力学方程组的定性理论及其应用．兰州大学博士学位论文, 1997. 209

永远在全局吸收集内运动, 不会“跑出”到其外[25]. 若以光滑的惯性流形来考察惯性流形外的状态向全局吸引子的逼近过程(全局吸引子在惯性流形上), 那么逼近是以指数速率进行的[27]. 因此, 这种向给定外源决定终态的适应过程是非常迅速的, 是快变过程, 非吸引子上的状态是暂时的状态. 吸引子是一个不变点集, 是一种“平衡”状态, 具有相对稳定的性质, 因此, 在吸引子上的状态运动是较为缓慢的演变过程. 可见, 当外源是定常的情况下或其变化非常缓慢时, 系统存在两种特征时间尺度: 向吸引子适应的快过程和在吸引子上演变的慢过程. 当外源变化时则存在第 3 种时间尺度, 即宏观状态随外参数变化而演变的更为缓慢的过程.

在讨论绝热无摩擦大气的地转适应和演变过程时, 曾庆存[4,33,34]首先提出了时间边界层的概念. 利用全局分析理论可以将这一概念推广到强迫耗散的非线性气候系统中, 根据气候运动的性质和特点, 这里引入气候系统三类时间边界层——第 1 和第 2 时间边界层和内时间边界层, 应用这三类时间边界层的概念可以清楚地认识气候系统的适应和演变过程. 如图 1 所示, 气候系统第 1 时间边界层内是系统不在吸引子上的状态迅速演变到吸引子上的过程, 与上述第 1 种时间尺度相对应. 第 1 时间边界层外是在吸引子上的演变过程, 对应于上述第 2 种时间尺度, 对应的系统是定常外源强迫的非线性耗散系统. 第 1 时间边界层和其外的演变过程又是第 2 时间边界层, 第 2 时间边界层外是宏观状态随外参数变化而演变的更为缓慢的过程, 即对应第 3 种时间尺度, 这时系统成为非定常外源强迫的非线性耗散系统. 在耗散的时间尺度内, 系统可看成是绝热无摩擦的, 这样就会

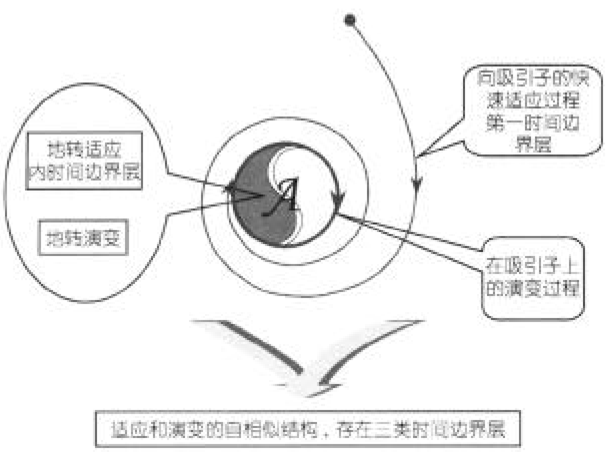

图 1 气候系统的适应和演变

有绝热无摩擦情形下的地转适应和地转演变过程, 而此时的时间边界层就是强迫耗散系统的内时间边界层, 相应的系统是绝热无摩擦的保守系统. 这里的内时间边界层与曾庆存[4,33,34]提出的时间边界层的概念等价. 上述特点反映出强迫耗散的非线性系统在时间边界层上的自相似结构. 在三类时间边界层概念的基础上, 就能够对强迫耗散非线性气候系统的适应和演变过程有比较清晰的理解, 同时, 也可应用于数值模式分解算法的设计中[22]. 不过, 关于上述时间边界层厚度及对应特征参数的确定还需要进一步的物理分析.

4 数值模式设计的算子约束原则[9,26]

数值模式的设计原则对于制作数值预报模式来说是至关重要的. 从 Richardson[35]不清楚如何简化方程组而导致其制作原始方程模式的失败, 到 Charney[36]提出尺度分析原则并应用到正压涡度方程成功作出第 1 张 500 hPa 数值预报形势图[37], 再到 Lorenz[38]提出能量约束原则并由 Shuman 等人[39]成功地应用于原始方程模式, 这些大气数值模式发展的事实充分说明模式设计原则的重要性. 然而, 除了尺度分析和能量约束原则外, 自 Shuman 等人[39]建立原始方程模式至今, 人们没有提出过新的模式设计原则. 而这些设计原则仅仅是在静力近似下对绝热无耗散的大气约束, 没有涉及非绝热和耗散的情况. 正如廖洞贤[40]指出的, 这种设计原始方程模式面临的主要任务是如何设计好强迫耗散的模式是不相称的. 因此, 需要提出新的模式设计思想. 根据全局分析理论可以提出一种新的设计原则, 即算子约束法[9,26], 其核心思想是从大气系统的本质特征出发, 简化前后方程中相应算子的性质保持不变. 这种方法是能量约束法的拓广, 有严格的数学基础, 并具有明确的物理意义, 能够保证各种简化不歪曲原系统最基本的物理属性和全局性质. 这种方法针对的是非静力近似下的非绝热和有耗散的情况, 因此, 适合于强迫耗散的非线性模式的设计.

5 最优数值计算[31,32]

要对气候系统进行数值模拟及预测, 就需要将动力学方程组离散化, 变成数值模式进行数值求解. 在这个求解过程中, 我们自然希望能够实现最优计算. 这里所谓最优是针对计算准确性而言的; 最优数值计算就是使某一数值方法按照它所能达到的最佳

准确性进行计算. 给定微分方程和数值方法, 那么在不考虑物理模型误差的情况下, 时空分辨率和机器精度就是决定其最佳准确性的主要参量. 利用全局分析可以给出一种实现最优数值计算的方法.

在数值试验中[31]我们发现计算误差和有效计算时间廓线如下定性结论(图 2): 一开始, 当步长减小时, 方法误差减小, 总的误差也减小, 使得有效计算时间增加; 然而当步长减小到一定程度时, 由于迭代的步数增多, 机器所带来的舍入误差占主导地位, 从而总误差又开始增大, 有效计算时间开始减小. 这样就必然存在一个步长 H(图 2), 此时总误差最小, 有效计算时间最大, 因此这个步长就称为最优步长. 由于方法误差(离散化误差)和舍入误差随步长的这种反向变化关系, 就导致了与量子力学中著名的 Heisenberg 测不准关系相类似的计算不确定性原理. 具体地说, 如果把离散误差和舍入误差看作是“共轭”量, 那么计算不确定性原理意味着, 若其中之一的不确定性越小, 则它的“共轭”量的不确定性就越大. 因此, 当机器精度给定时, 数值方法所得数值解所能达到的最好准确度就已完全确定. 计算不确定性原理, 对初值极端敏感的混沌系统和一些具有暂态混沌过程的非线性系统的长时间数值积分的计算有效时间加上了确定的限制. 在机器精度是有限的这一固有属性下, 计算不确定性原理表明, 对于非线性系统, 数值算法的计算能力是有限的.

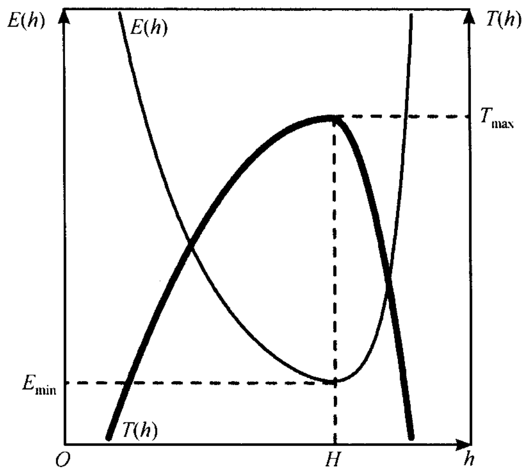

图 2　计算误差 $E(h)$和有效计算时间 $T(h)$随步长的变化

图中 H 是最优步长, E_{min} 代表最小误差, T_{max} 代表最大有效计算时间

为了实现最优计算, 首先要进行系统的误差分析, 确定出最佳关系, 找到最佳时空分辨率和最大有效计算时间, 由此便可实现最优计算.

对于常微分方程组, 利用大量的数值结果和新导得的误差公式发现两个与方程、初值、数值格式无关的普适关系, 即

$$l=\frac{H_1}{H_2}=10^{\frac{n_2-n_1}{p+0.5}},\quad k=\frac{C(T_2)}{C(T_1)}=l^p,$$

其中 H_i 是最优步长, n_i 是机器的有效数字的位数, p 是数值方法的阶数, T_i 是最大有效计算时间, i = 1, 2 代表不同精度的两种机器. 文献[31,32]给出两个普

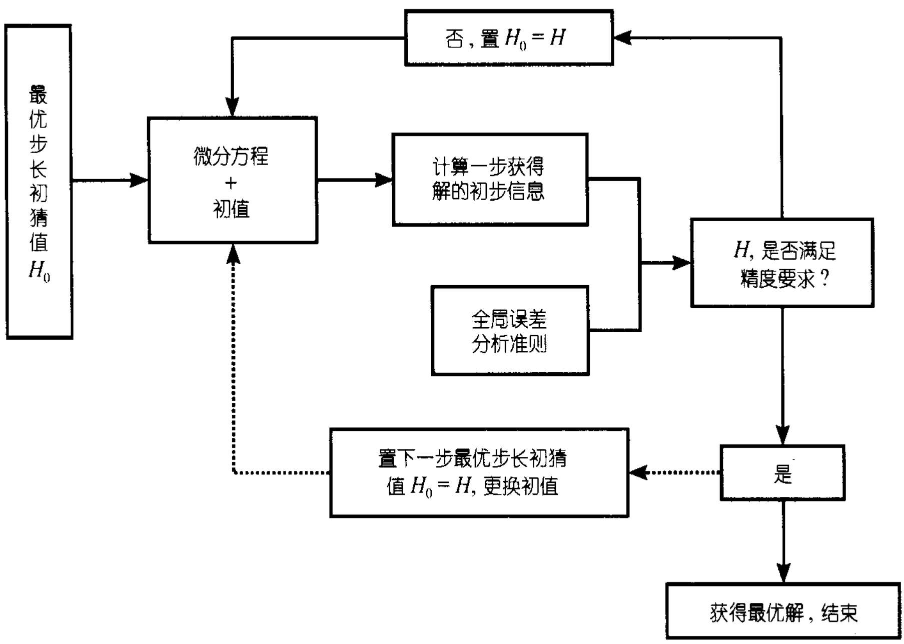

图 3　逐步调整的最优计算方法具体实现过程流程框图

适关系的验证，结果表明理论值与试验值是极为一致的．根据上述理论和试验结果我们就可以设计出一种称之为逐步调整的最优计算方法，其具体实现过程框图见图 3．实践表明，这种方法是实现最优数值计算的一个有效的方法．可以预料，这种方法必将在实际的数值计算中有广泛的应用．

6 小结

本文简要概述了气候系统全局分析理论的思想、目的、主要理论结果及其多方面的应用，特别是在气候系统适应和演变、数值模式设计原则、最优数值计算三方面的应用，重点介绍了我国学者在这一领域中的重要成果和新的发现．应当说，气候系统全局分析理论还是一个刚刚起步的研究领域，其中还有相当多的工作有待深入研究．根据已有的成果和其潜在的应用价值，我们有理由相信，随着研究的进一步深入，全局分析理论必将在气候科学研究中发挥更大的作用．

致谢　本工作受国家重点基础研究发展规划项目(G1998040901)、中国科学院创新项目(ZKCX2-SW-210)和国家自然科学基金(40135020, 40275025)资助．

参 考 文 献

1 叶笃正，曾庆存，郭裕福．当代气候研究．北京：气象出版社，1991. 353
2 World Climate Research Programme (WCRP). CLIVAR Initial Implementation Plan. WCRP-103, WMO/TD 869, ICPO 14, Geneva, Switzerland, 1998. 314
3 曾庆存．数值天气预报的数学物理基础(第一卷)．北京：科学出版社，1979. 548
4 曾庆存．一个可供现代数学分析研究的气候动力学模型．大气科学，1998, 22(4): 408~417
5 丑纪范．长期数值天气预报．北京：气象出版社，1986. 329
6 杨大升，刘余滨，刘式适．动力气象学．北京：气象出版社，1983. 82~99
7 廖洞贤，王两铭．数值天气预报原理及其应用．北京：气象出版社，1986. 1~28
8 刘式适，刘式达．大气动力学(上册)．北京：北京大学出版社，1991. 1~33, 167~184
9 丑纪范．初始场作用的衰减与算子的特性．气象学报，1983, 41(4): 385~392
10 丑纪范．大气动力学的新进展．兰州：兰州大学出版社，1990. 214
11 丑纪范．大气动力学的若干进展和趋势．现代大气科学的前沿与展望．北京：气象出版社，1995. 71~75
12 Li Jianping, Chou Jifan. The effects of external forcing, dissipation and nonlinearity on the solutions of atmospheric equations. Acta Meteor Sinica, 1997, 11(1): 57~65
13 Li Jianping, Chou Jifan. Further study on the properties of operators of atmospheric equations and the existence of attractor. Acta Meteorol Sinica, 1997, 11(2): 216~223
14 汪守宏，黄建平，丑纪范．大尺度大气运动方程组解的一些性质．中国科学，B 辑，1989, (3): 328~336
15 Lions J L, Temam R, Wang S. Geostrophic asymptotics of the primitive equations of the atmosphere. Topological Methods in Nonlinear Analysis. Special Issue Dedicated to Jean Leray, 1994, 4: 253~287
16 Lions J L, Manley O, Temam R, et al. Physical interpretations of the attractor for a simple model of atmospheric circulation. Journal of Atmosphere Sciences, 1997, 54(9): 1137~1143
17 Temam R, Wang S. Mathematical problems in meteorology and oceanography. Bull Amer Meteorol Soc, 2000, 81(2): 319~321
18 Lions J L, Temam R, Wang S. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. Nonlinearity, 1992, 5: 228~237
19 Wang S. Attractors for the 3D baroclinic quasi-geostrophic equations of large scale atmosphere. J Math Anal Appl, 1992, 165: 266~283
20 Lions J L, Temam R, Wang S. Mathematical models and mathematical analysis of the Ocean/Atmosphere system. C R Acad Sci Paris, Ser I, 1993, 316: 211~215
21 Lions J L, Temam R, Wang S. On the equations of large-scale ocean. Nonlinearity, 1992, 5: 1007~1053
22 李建平，丑纪范．大气动力学方程组的定性理论及其应用．大气科学，1998, 22(4): 443~453
23 李建平，丑纪范．大气多平衡态产生之根源．科学通报，1996, 41(22): 2061~2063
24 李建平，丑纪范．非定常外源强迫下大尺度大气方程组解的性质．科学通报，1995, 49(13): 1207~1209
25 李建平，丑纪范．大气吸引子的存在性．中国科学，D 辑，1997, 27(1): 89~96
26 李建平，丑纪范．大气动力学方程组简化的算子约束法．科学通报，2000, 45(19): 2104~2108
27 李建平，丑纪范．大气方程组的惯性流形．中国科学，D 辑，1999, 29(3): 270~278
28 李建平，丑纪范．强迫耗散非线性大气方程的计算稳定性．科学通报，1999, 44(2): 214~217
29 李建平，丑纪范．地形作用下大气方程组解的渐近性态．自然科学进展，1999, 9(12): 1110~1118
30 Liu Shida, Luo Zhexian, Luo Dehai, et al. Progress in the study of nonlinear atmospheric dynamics in China (1995~1998). In: 1995~1998 China National Report on Meteorology and Atmospheric Sciences. Beijing: China Meteorological Press, 1999. 155~159
31 李建平，曾庆存，丑纪范．非线性常微分方程的计算不确定性原理．Ⅰ．数值结果．中国科学，E 辑，2000, 30(5): 403~412
32 李建平，曾庆存，丑纪范．非线性常微分方程的计算不确定性原理．Ⅱ．理论分析．中国科学，E 辑，2000, 30(6): 550~567
33 曾庆存．大气的适应过程和演变过程Ⅰ．物理分析和线性理论．气象学报，1963, 33(2): 163~174
34 曾庆存．大气的适应过程和演变过程Ⅱ．非线性问题．气象学报，1963, 33(3): 281~289
35 Richardson L F. Weather Prediction by Numerical Process. London: Cambridge University Press, 1922; reprinted, New York: Dover, 1965. 236
36 Charney J G. On the scale of atmospheric motion. Geophys Publ, 1948, 17(2): 1~17
37 Charney J G, Fjϕrtoft R, von Neuman J. Numerical integration of the barotropic vorticity equations. Tellus, 1950, 2: 237~254
38 Lorenz E N. Energy and numerical weather prediction. Tellus, 1960, 12: 364~373
39 Shuman F G, Hovermale J B. A six-level primitive equation model. J Appl Meteor, 1968, 7: 525~531
40 廖洞贤．大气数值模式的设计．北京：气象出版社，1999. 291

(2002-07-29 收稿，2002-12-31 收修改稿)