

非线性局部 Lyapunov 指数与大气可预报性研究*

陈宝花^① 李建平^{①②**} 丁瑞强^②

(① 兰州大学大气科学学院, 兰州 730000; ② 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

摘要 鉴于线性误差发展理论研究大气可预报性存在的局限性, 采用非线性扰动发展方程讨论动力系统误差增长规律, 并在此基础上提出一个新概念: 非线性局部 Lyapunov 指数. 它与经典 Lyapunov 指数有本质的区别, 可以表征初始误差在有限时间内的局部平均增长率, 大小与初值、初始误差、物理量、演化时间、以及时间尺度、空间尺度有关. 结合该指数的定义以及大气本身的动力学特征给出合理的计算方法, 得到大气初始误差随时间的演化并确定了最大可预报时间. 最后以 500 hPa 位势高度为例, 详细讨论了非线性局部 Lyapunov 指数在大气可预报性中的应用, 得到的主要结论是: 大气可预报性具有明显的空间分布特征. 从总体上看, 可预报性呈纬向带状分布. 赤道上的可预报时间最大, 南极地区次之, 北极地区也较大, 南北两半球的副热带和中纬度地区可预报性最小. 在赤道地区, 平均可预报时间为 12 d 左右, 最大值分布在热带印度洋、印度尼西亚及邻近地区、热带东太平洋等地区, 大约为两周. 南极地区可预报性也很高, 平均可预报时间大约 9 d, 这一特征在夏季更显著. 北极地区的可预报性也比邻近中高纬大, 但增加不如南极地区明显. 南北半球中纬度地区(30°~60°S 和 30°~60°N)的可预报性最小, 平均仅有 3~4 d. 另外, 可预报性随季节有差异. 北半球大部分地区, 对应冬季的可预报性比夏季的大, 特别是中高纬北大西洋、北太平洋以及格陵兰岛等地区, 冬季的可预报性明显比夏季的大; 南半球, 南极附近 60°~90°S 对应夏季的可预报性明显比冬季的大, 而其他区域尤其在 30°~60°S 的可预报时间随季节变化不大, 大约 3~5 d. 理论和数据计算结果均说明非线性局部 Lyapunov 指数以及由它得到的非线性局部误差增长确实可以很好地定量表征各种大气物理量在不同时空域下的可预报性.

关键词 非线性 局部 Lyapunov 指数 大气可预报性 最大可预报时间

如果忽略一些随机因素的影响, 大气系统可被控制其发展的物理规律、边界条件以及初始场来决定. 认为是一个确定性的非线性系统. 它未来的发展由数值天气预报就是基于这个出发点: 假如有一个很

收稿日期: 2005-06-28; 接受日期: 2006-03-01

* 国家杰出青年科学基金(批准号: 40325015)和国家自然科学基金创新群体(批准号: 40221503)联合资助项目

** 联系人, E-mail: ljp@lasg.iap.ac.cn

SCIENCE IN CHINA Ser. D Earth Sciences

精确的模式和观测系统, 就可以准确地对未来很长时间的天气做出预报. 然而, 初始小误差是完全不可避免的, 由于非线性作用, 初始微小误差随时间会产生很大的偏差, 从而导致可预报性的存在^[1-3].

19 世纪 40 年代前期, Kolmogoroff 阐述了大气初始状态无限小误差经很长时间可能会导致完全不同的大气状态^[1]. 1957 年 Thompson^[2]首先提出大气可预报性问题. 后来 Lorenz^[3]指出有三种方法研究大气的可预报性问题. 到目前为止, 可预报性研究主要建立在数值模式基础上, 估计预报误差增长是大气可预报性经典研究的主要目标^[1,4-7]. 通常给定两个极其相似的初始场, 积分同一大气模式得到初始误差的发展, 利用误差增倍时间估计最大可预报时间. 最新的研究表明, 上述方法所得到的可预报期限, 不仅依赖于算法, 也依赖于计算机精度, 同时还依赖于数值模式本身^[8-12]. 所以, 这样得到的时间并不是大气或气候的实际可预报性期限, 而且也并非是模式最佳可预报性的确切定量. Dalcher 和 Kalnay^[13]则指出小误差增倍时间并不是误差增长的很好度量标准, 因为它只能通过外推到小误差求得, 其值对外推方法很敏感. Arpe 等^[14]也指出估计小误差增倍时间是很困难的. 而有限时间误差增长是很好的参数, 因为它可以由现有数据(模式、观测)得到.

Lyapunov 指数 σ 是度量相空间中初始邻近轨道长期平均指数发散(收缩)率的一个物理量. 在混沌动力系统理论分析中, σ 可以估计初始无限小误差的平均增长率, 因此一些研究用它定性讨论大气的平均可预报性^[15-17]. 当至少存在一个正 Lyapunov 指数时, 表示系统初始邻近轨道随时间指数发散, 吸引子是混沌的. 通常用所有正 Lyapunov 指数之和即二阶 Renyi 熵的倒数表征可预报性的时间尺度. 在遍历系统中, σ 不依赖于初始值, 所有轨道会产生相同的指数, 即 Lyapunov 指数是描述吸引子的全局特征^[18]. 但是初始误差发展并不处处相同^[19-21], 因此如果混沌吸引子上可预报性是时间、空间的函数或者如果我们感兴趣的是短期预报, 就有必要研究吸引子的局部动力特征. 后来一些人^[22-27]提出用局部或有限时间 Lyapunov 特征指数度量相空间的局部可预报性, 其定义是在有限时间内初始误差的平均增长率. 相

对于经典 Lyapunov 指数, 局部 Lyapunov 指数可以更有效地度量可预报性, 因为它可以展示吸引子的时空结构, 这种结构用来判定临近轨道的发散(收缩)率, 从而确定可预报性高(低)的区域. 然而不管是 Lyapunov 指数还是已提出的局部 Lyapunov 指数, 都事先假定初始误差无限小以至其发展近似满足切线性方程, 通过求解演化矩阵 M 的特征向量和特征值得到. 但随着误差增长, 这些前提条件很难实现; 况且大气物理量的观测精度不可能达到无限小, 因此用线性误差发展方程讨论大气可预报性存在很大的局限性.

鉴于上述问题, 本文对误差发展方程不作线性近似, 直接用原始非线性方程讨论初始扰动的发展, 在此基础上提出非线性局部 Lyapunov 指数的概念, 用来表示初始误差在有限时间内的局部非线性增长率; 结合大气本身的动力学特征给出该指数的合理计算方法和最大可预报时间的确定方法; 最后用实际观测数据计算初始误差局部平均增长, 讨论了大气可预报时间随空间、季节的变化特征.

1 理论背景

1.1 传统 Lyapunov 指数

天气和气候系统可用复杂的偏微分方程组来描述, 通过 Galerkin 方法可将其转化为具有截谱形式的非线性常微分方程组:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)). \quad (1)$$

假设 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ 是基态, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ 为其相应的初始态; 如果 $\delta\mathbf{X}_0$ 是 \mathbf{X}_0 的初始无限小扰动, 则 $\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_0$ 在 t 时刻发展为 $\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{X}(t)$ 满足如下方程组:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{X}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{X}(t)). \quad (2)$$

(2)减(1)式得

$$\frac{d}{dt} \delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{X}(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)). \quad (3)$$

方程右边对 $\delta\mathbf{X}$ 泰勒展开取一级近似有

$$\frac{d}{dt} \delta\mathbf{X} = \mathbf{G}\delta\mathbf{X}, \quad (4)$$

其中 G 为 Jacobi 矩阵,

$$G_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j}. \quad (5)$$

方程(4)的解为

$$\delta X(t) = M(t, t_0) \delta X(t_0), \quad (6)$$

其中 $M(t, t_0)$ 是基本矩阵, 亦称演化矩阵, 它只是时间的函数. (4)式表明初始微小误差随时间发展与相应时刻的 N 阶 Jacobi 矩阵的特征值或特征指数谱 L 有密切的关系, 但是 Lyapunov 指数并不是等于 Jacobi 矩阵的特征值, 而是通过演化矩阵 $M(t, t_0)$ 导出的. N 阶 Jacobi 矩阵与演化矩阵的关系为

$$M(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t G(t') dt'}. \quad (7)$$

Oseledec^[28]证明对于任何一个初始点 $X(t_0)$, 下面的限制都存在:

$$M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (M \cdot M^*)^{1/2t}, \quad (8)$$

这里 M^* 是 M 的伴随, 同时也存在一组正交向量 f_i 使得

$$\sigma_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |M(t, t_0) f_i(t_0)|, \quad (9)$$

其中 σ_i 是矩阵 M_∞ 对应于 f_i 的特征值取对数, 被定义为 Lyapunov 指数. N 维相空间存在 N 个特征值, 构成 Lyapunov 指数谱. 它们表示相空间中初始无限小临近轨道沿特征向量 f_i 方向以平均速度 $e^{\sigma_i t}$ 分离, 第一特征值即最大 Lyapunov 指数表示初始扰动在最快速发展方向上的平均发展率. σ_i 不依赖于初始值, 是描述吸引子的全局特征.

上述推导对初始误差发展方程作了线性近似假设, 但是随着误差的不断增大, 非线性项越来越重要, 线性近似假设不再适用. 一些文章专门讨论线性模式研究误差发展的局限性^[29-31], 因此本文保留非线性项, 定义一个新的动力学统计量: 非线性局部 Lyapunov 指数, 用它表示有限时间内误差的局部增长率.

1.2 非线性局部 Lyapunov 指数

向量 x 和扰动向量 $x + \delta$ 分别满足下面方程

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad (10)$$

$$\frac{d(x + \delta)}{dt} = F(x + \delta, t), \quad (11)$$

其中 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^T$ 为扰动误差向量, 则扰动误差满足

$$\frac{d\delta}{dt} = \tilde{F}(x, \delta, t) \delta, \quad (12)$$

其中非线性误差增长函数 $\tilde{F}(x, \delta, t) = [F(x + \delta, t) - F(x, t)] / \delta$. (12)式存在解

$$\delta(t) = \eta(x, \delta, t) \delta(0), \quad (13)$$

其中 $\eta(x, \delta, t)$ 为非线性误差传播算子. 与(6)式中的线性误差传播算子相比, 非线性传播算子有本质的区别. 后者不仅与演化时间 t 有关, 而且依赖于初始值 x 和初始误差 δ , 这是非线性误差增长理论的优越之处. 对于变量 x_i , 定义非线性局部 Lyapunov 指数:

$$\lambda(x_i, \delta_i, t) = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(0)} \right|. \quad (14)$$

从(14)式可知, λ 表示有限时间 t 内, 初始误差以平均速率 $e^{\lambda(x_i, \delta_i, t)}$ 发展, 其大小与初值、时间间隔、初始误差有关, 可以描述吸引子的局部特征. $\lambda > 0$ 表示两临近初始轨道间的距离随时间增长, 它们之间的相关性损失; 指数值越大表示误差发展越快, 可预报性越小.

前面推导可以看出经典 Lyapunov 指数 σ 与本文提出的非线性局部 Lyapunov 指数 λ 有本质的区别. 首先, 前者是在线性近似假设下讨论误差发展, 而后者考虑了误差发展方程中的非线性项, 二者定义的前提条件不同. 其次, 前者是在相空间中讨论所有初始误差在无限长时间内的平均增长情况, 大小与初值无关, 且只能度量沿特征向量 f_i 方向的平均增长率, 无法单独研究某个变量 x_i 方向上的误差发展情况, 比如最大 Lyapunov 指数仅仅度量扰动最快增长方向上的平均增长率; 而后者可以单独讨论任意方向上的初始误差在有限时间内的平均发展, 大小与初值、初始误差、物理量、演化时间、时间和空间有关, 是描述吸引子的局部特征. 因此, 对于复杂的非线性大气系统, 非线性局部 Lyapunov 指数可以研究不同物理量在不同时空域下的可预报性, 从理论上讲可以更好地反映误差随时间的非线性演化. 另外, 本文提出

的非线性局部 Lyapunov 指数与以往的局部 Lyapunov 指数也不同, 后者本质上与 Lyapunov 指数相同, 都是在线性近似条件下提出. 而实际大气初始误差不可能达到无限小, 因此用线性近似方程讨论可预报性存在很大局限性.

2 资料、计算方法及与传统方法的比较

2.1 数据资料

本文所用资料是 NCEP 再分析数据: 1958~1997 年 500 hPa 逐日四次位势高度场, 水平分辨率为 $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ 经纬度, 全球共 144×73 个网格点.

2.2 非线性局部 Lyapunov 指数计算方法介绍

(1) $t_0 = 1$, 以 $x(t_0)$ 为基准点, 在 40 年中所在日期 t 前后 D 天(本文取 $D = 5$ 天)范围内选出与它距离最小的点 $x'(t_0)$ 作为基准点的最小初始误差, 这样可以保证两状态是动力性质一致的. 它们的距离为

$$L(t_0) = |x'(t_0) - x(t_0)|. \quad (15)$$

这一步非常关键而且是与 Wolf^[32] 提出的 Lyapunov 指数计算方法的重大区别. 经典 Lyapunov 指数与初始误差 δ 无关, 可以按照 Wolf 方法在所有相空间中找出与初值距离最近的点作为初始误差, 这种不考虑它们的演化是否属于动力性质一致的做法存在有很大缺陷(见后面分析); 而非线性局部 Lyapunov 指数则是寻找与初值属于动力性质一致的最近点, 因此选取最近点是很有讲究的. 要使最近点有意义, 不仅要求两点距离很近, 而且它们的动力学性质要保持一致. 我们知道天气系统存在显著的年循环, 假如变量 x 以春季 3 月 1 号为初值, 在所考察的历史资料中离它距离最近的点可能是秋季的某一天, 而这两点的动力性质不同, 发展趋势正好相反. 图 2 是用 Wolf 方法得到的初始误差随时间的发展, 出现误差不断增长的情况与事实不相符合, 说明将这种方法存在局限性. 本文的方法具有明显的动力学意义, 可以讨论系统中不同变量的可预报性, 也可以避免用重构相空间方法所存在的一些问题^[33], 因此更具有实际意义.

(2) 取演化步长为 T , 经过 T 基点 $x(t_0)$ 沿轨道演化成 $x(t_0 + T)$, 而 $x'(t_0)$ 则跑到 $x'(t_0 + T)$, 得到新距

离:

$$L'(t_0 + T) = |x'(t_0 + T) - x(t_0 + T)|. \quad (16)$$

$x(t_0)$ 的初始误差在 T 内的平均增长率为

$$\lambda_{T1} = \frac{1}{T} \ln \frac{L'(t_0 + T)}{L(t_0)}. \quad (17)$$

(3) 以 $x(t_0 + 1)$ 为基准点重复过程(1)(2)得到 λ_{T2} , 表示第二个基准点的初始误差在 T 内的平均增长率.

(4) 上述过程一直继续到 $\{x_i\}$ 的终点, 得到每个基准点在 T 内的误差相对增长率 λ_{TK} . 最后取指数增长率 λ_{TK} 的平均值作为步长为 T 的非线性局部 Lyapunov 指数近似估计为

$$\lambda(T) = \frac{1}{T} \sum_{K=1}^N \lambda_{TK}. \quad (18)$$

(5) $T = T + 1$, 重复过程(1)~(4), 得到 $\lambda(T)$ 随演化步长 T 的关系.

(6) 由(17), (18)式可以求得相对误差经过 T 的平均增长

$$Err(T) = \lambda(T) \times T = \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N \ln \frac{L'(t_K)}{L(t_0)}. \quad (19)$$

通过考察相对误差增长是否达到饱和来判断最大可预报时间的大小.

下面分别取 $0^\circ, 30^\circ\text{N}, 60^\circ\text{N}$ 和 90°N 四个纬度上的纬向平均时间序列, 采用上述计算方法得到非线性局部 Lyapunov 指数随时间的演化, 见图 1.

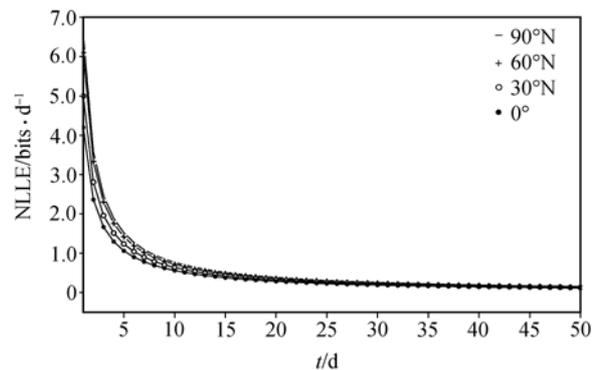


图 1 非线性局部 Lyapunov 指数 $\lambda(T)$ 随时间的演化
NLLE 指非线性局部 Lyapunov 指数

由图 1 可知, 在所有时间内非线性局部 Lyapunov 指数非负且随演化时间单调减小, 表明初始误差随时间逐渐增加的同时由于非线性作用其增

长率随之减小. 说明对于实际的大气, 初始误差不可能达到无限小, 它满足非线性发展, 以往采用线性方程近似讨论大气误差增长存在问题. 从图中还可以看出, 在相同时间内赤道上初始误差增长最慢; 其次是 30°N , 60°N 和 90°N 增长最快. 四个纬度初始最小误差分布(图未画)表明: 赤道上误差最小, 随着纬度增加误差越来越大. 说明初始误差越大, 其增长速率越快.

为了进一步说明非线性项在误差增长方程中的作用, 下面用实际资料计算比较了两种不同的理论方法在描述初始误差随时间相对增长时的主要不同.

2.3 线性和非线性理论计算结果的比较及最大可预报性时间的确定

图 2, 3 分别是前面选取的四个纬度上的纬向平均时间序列按照线性理论方法(Wolf 等)和本文提出的非线性局部 Lyapunov 指数计算得到的初始误差随预报时间的发展, 并且根据饱和误差定量地确定了最大可预报时间, 这是比过去大多数可预报性理论研究(定性讨论)的另一优越之处.

从图 2, 3 可见, 线性误差增长理论和非线性误差增长理论所得的结果是完全不同的. 一开始, 两种理论得到的结果在趋势上还比较相近(虽然数值上有差别), 这表明当初始很小误差在初期增长阶段, 线性误差增长理论还是可以适用的; 然而, 随着时间的增长, 线性理论的结果是一直单调增长, 而非线性理论的结果将在一定阶段达到饱和并在饱和值附近振荡, 表明此时线性方程不再适用, 必须用非线性理论来讨论. 当相对误差基本达到饱和时, 表明进入随机运动状态, 此时, 系统的初始信息丢失, 预报失去意义. 因此, 所对的时间就是最大可预报时间. 在实践中, 为避免样本波动影响, 将代表非线性误差发展的曲线与误差达到 99% 饱和值的水平线二者交点所对的时间为大气的最大可预报时间. 饱和误差的估计: 从图 3 可以看出, 15 d 以后误差增长几乎为 0. 因此, 将 15 d 以后的相对误差取平均作为饱和误差估计. 取稍微低于饱和值是为了减少样本波动的影响. 四个纬度上纬向平均位势高度逐日预报的最大可预报时间分别为 7, 6.5, 11, 13.5 d. 这与实际符合, 说明非线性

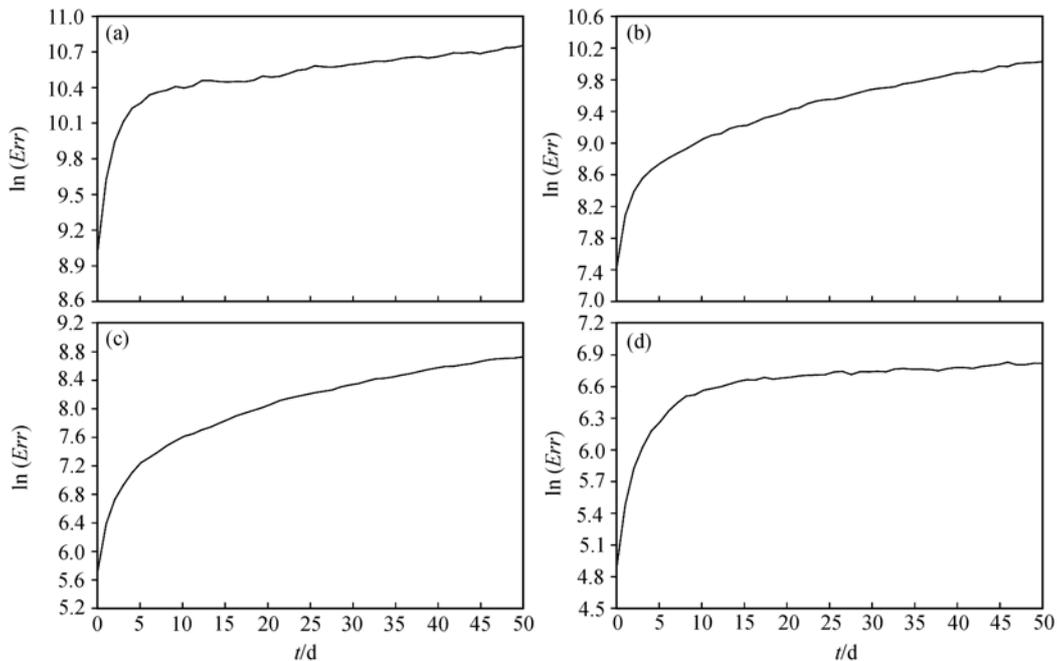


图 2 初始相对误差 Err 随预报时间的线性增长
(a)~(d)分别是 90°N , 60°N , 30°N , 0° 的纬向平均时间序列计算的结果

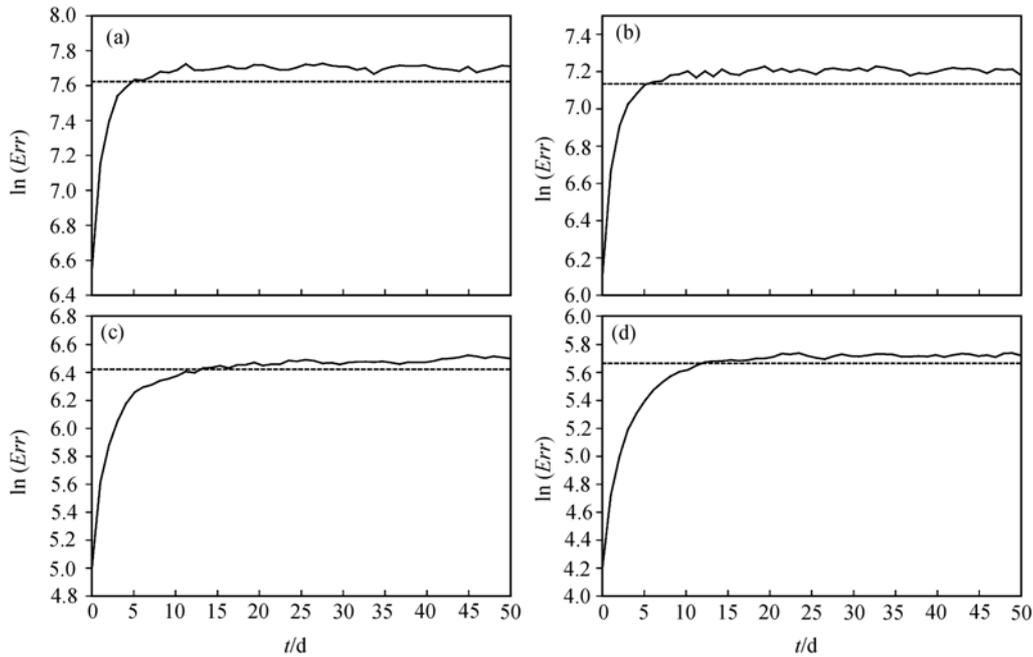


图 3 初始相对误差随时间的非线性增长

水平线是误差达到 99% 饱和值对应的值, 15 d 以后的相对误差求和取平均作为饱和误差估计, 其他说明同图 2

误差增长理论可以反映实际大气初始误差非线性发展的特征, 较线性理论有明显的优越性, 值得进一步深入探索下去。

3 非线性局部 Lyapunov 指数在大气可预报性中的应用

前面对四个纬度的纬向平均位势高度时间序列计算了非线性局部 Lyapunov 指数及其对应的相对误差增长随时间的演化, 定义 99% 饱和值所对应的时间为最大可预报时间。结果表明本文提供的指数可以很好地表征大气初始扰动随时间的发展特征。以下计算了 500 hPa 高度场的初始误差在不同空间, 不同季节的发展, 进而讨论大气可预报性随时间、空间的分布。

3.1 大气可预报性的空间分布

对全球所有格点的逐日 500 hPa 位势高度时间序列计算非线性局部 Lyapunov 指数及对应的相对误差增长, 确定出最大可预报时间并给出它随空间的分布, 见图 4。

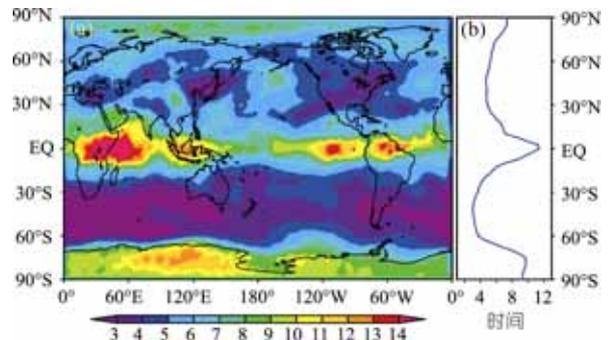


图 4

- (a) 全年 500 hPa 逐日位势高度场的最大可预报时间的空间分布;
- (b) 可预报时间的纬向平均随纬度分布(单位: d)

从图 4 看出, 大气可预报性具有明显的空间分布特征。从总体上看, 可预报性呈纬向带状分布, 赤道上的可预报时间最大, 南极地区次之, 北极地区也较大, 南北两半球的副热带和中纬度地区可预报性最小。具体的说, 在赤道地区, 平均可预报时间为 12 d 左右, 最大值分布在热带印度洋、印度尼西亚及邻近地区、热带东太平洋等地区, 大约为两周。南极地区可预报性也很高, 最大可预报时间大约 9 d, 南极地

区可预报性大可能与这里的斜压性小以及因低风速引起的高频变化小有关系,这一特征在南半球夏季更显著(图 6). Reichler 和 Roads^[34], Kumar 等^[35]以及 Bacmeister 等^[36]用数值模式也证实了南极附近确实存在可预报性高值区, Trenberth^[37]通过观测研究亦得到同样的结论,这些从另一个侧面印证了本文的结论. 所不同的是我们的方法可以定量地确定出最大可预报时间长度,充分显示本文研究方法的优越性. 北极地区可预报性也比邻近中高纬度高,但不如南极地区明显. 南北两半球中纬度地区(30°~60°S 和 30°~60°N)的可预报性最小,平均仅有 3~4 d. 可预报性也呈现出纬向非均匀性,如在北大西洋、北太平洋中部等地区的可预报性时间大约是一周,比同纬带的其他地区明显的大.

3.2 纬向平均位势高度的最大可预报时间随纬度分布

由于空间尺度的不同,纬向平均量的可预报性与原场的可预报性会有不同的特征. 为了揭示这一点,根据不同纬度上的纬向平均时间序列计算非线性局部 Lyapunov 指数及对应的相对误差增长,得到最大可预报时间随纬度的分布,见图 5.

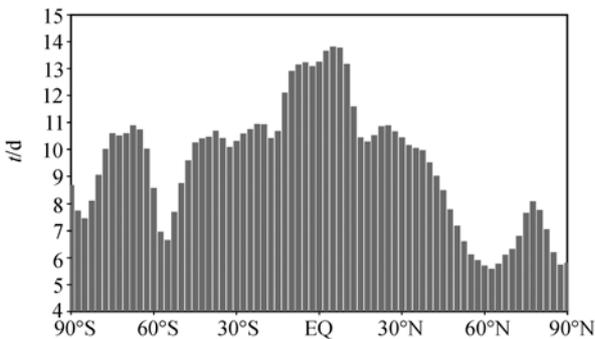


图 5 500 hPa 纬向平均位势高度的最大可预报时间(单位: d)随纬度分布

由图 5 可知,对于 500 hPa 纬向平均位势高度,其可预报性时间随纬度的分布在南北半球有一定类似,即随纬度的增加,可预报时间从赤道到中高纬逐渐减小,在南北纬 50°~60°之间达到最小,然后靠近极地又呈增加趋势. 在热带地区(10°S~10°N)的可预报性最大,可预报时间大约为两周;在南北两个半球

15°~45°之间可预报时间基本相当,约 10~11 d;在南北纬 50°~60°之间只有 5~6 d,且随纬度增加北半球中纬度的可预报时间减小得比南半球大. 靠近两极地区的可预报性有所增加,在 65°~80°S 可预报性明显增加,最大可预报时间为 9~10 d,70°~85°N 也比邻近纬度高,大约是一周,但增加不如南半球显著. 这些与图 4 中的结论类似,只是在南北半球 15°~45°,纬向平均场的可预报时间基本相当,而逐日场的平均可预报时间则随纬度增加而减小. 另外,纬向平均场的可预报时间明显比逐日场的大,说明可预报性与空间尺度有关,尺度增加会使可预报性增大.

3.3 冬夏季最大可预报时间随空间分布

在不同季节大气的可预报性不同. 为了得到不同区域大气可预报时间随季节的变化,可以根据 12 月、1 月、2 月逐日资料的误差非线性相对增长 $Err(k, T)$ 得到冬季的最大可预报时间,同理由 6~8 月逐日资料的误差非线性相对增长 $Err(k, T)$ 可得到夏季的最大可预报时间,结果分别见图 6 和 7.

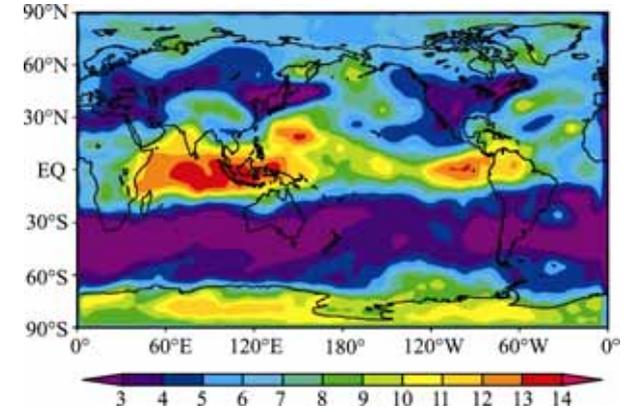


图 6
说明同图 4(a),但对北半球冬季(DJF)

在冬季或夏季,大气可预报时间都有一定的空间结构,均表现为明显的纬向带状分布,与全年的情况很类似. 但是冬夏季可预报性的具体分布还是有很大差别. 赤道附近,北半球冬季的可预报性大值区在热带印度洋东,印度尼西亚及邻近区域,热带东太平洋;而北半球夏季则分布在非洲,热带大西洋和赤道中东太平洋. 南极地区,冬夏季的可预报性都比邻近中高纬高,但这一特征在对应夏季更明显. 北

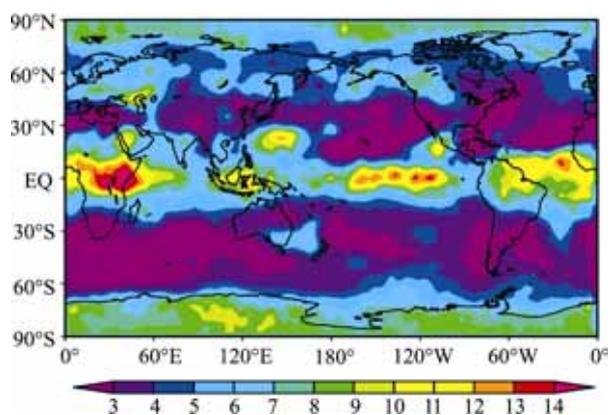


图 7

说明同图 4(a), 但对北半球夏季(JJA)

半球中高纬度(30°~60°N), 大部分地区冬季的可预报性比夏季的大, 特别是在北太平洋(靠近美国海岸)、北大西洋等区域, 而西欧则夏季的可预报性比冬季大. 南半球中高纬(30°~60°S)可预报时间随季节变化不大, 约为 3~5 d.

4 总结

估计有限时间内初始小误差增长是讨论大气可预报性的主要目标和手段. 针对大气本身是一个非线性系统和过去采用线性近似方程讨论初始误差发展存在的很多问题, 本文首先提出了非线性局部 Lyapunov 指数的概念, 它表示某一物理量的初始误差在有限时间内的平均局部非线性相对增长率. 从本文的理论背景分析可知, 该指数既有数学基础又有一定的物理意义, 与经典线性理论下的 Lyapunov 指数相比能更好地描述实际大气的初始观测小误差随预报时间的发展. 在理论分析基础上, 根据该指数的定义以及大气本身的动力学特征, 给出了利用实际资料计算指数的合理方法. 用资料计算的结果详细比较线性理论和非线性理论在描述误差发展上的主要不同, 再次表明非线性局部 Lyapunov 指数更能很好地反映实际大气初始误差的非线性增长特征. 根据误差达到饱和的时间可以定量确定出最大可预报时间, 这是与传统工作有本质区别的地方. 最后, 详细讨论 Lyapunov 指数在大气可预报性研究中的应用, 分析了大气最大可预报时间随空间和季节的变化, 得到一些有意义的结果. 主要结论为: 大气可预

报性具有明显的空间分布特征. 从总体上看, 可预报性呈纬向带状分布, 赤道上的可预报时间最大, 南极地区次之, 北极地区也较大, 南北两半球的副热带和中纬度地区可预报性最小. 赤道附近, 平均可预报时间为 12 d 左右, 最大值分布在热带印度洋、印度尼西亚及邻近地区、热带东太平洋等地区, 大约为两周. 南极地区可预报性也很高, 最大可预报时间大约 9 d, 这一特征在夏季更显著, 北极地区的可预报性也有邻近中高纬大, 但增加不如南极地区明显; 另外, 可预报性随季节有差异. 北半球大部分地区, 对应冬季的可预报性比夏季的大, 特别在中高纬北大西洋、北太平洋以及格陵兰岛等地区的冬季可预报性明显比夏季的大; 南半球, 靠近南极对应夏季的可预报性明显比冬季的大, 而其他区域尤其在 30°~60°S 的可预报时间随季节变化不大, 大约 3~5 d. 除 500 hPa 位势高度之外, 我们用指数也讨论了 850 hPa 温度场的可预报性, 同样可以得到合理的结论. 这表明本文提出的非线性局部 Lyapunov 指数可以很好地探讨不同物理量在不同时空域的可预报性. 随着研究的进一步深入, 我们相信, 非线性局部 Lyapunov 指数在大气、海洋可预报性理论研究中会有更好的应用前景.

致谢 本文得到丑纪范院士的亲切指导和帮助, 在此表示感谢.

参 考 文 献

- 1 Chou J f. Predictability of the Atmosphere. *Adv Atm Sci*, 1989, 6: 335—346
- 2 Thompson P D. Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large-scale atmospheric flow patterns. *Tellus*, 1957, 9: 275—295
- 3 Lorenz E N. Three approaches to atmospheric predictability. *Bull Ame Meteorol Soc*, 1969, 50: 345—349
- 4 Charney J G, Fleagle R G, Riehl H, et al. The feasibility of a global observation and analysis experiment. *Bull Ame Meteorol Soc*, 1966, 47: 200—220
- 5 Smagorinsky J. Problems and promises of deterministic extended range forecasting. *Bull Ame Meteorol Soc*, 1969, 50: 286—311
- 6 Lorenz E N. A study of the predictability of a 28 variable atmospheric model. *Tellus*, 1965, 17: 321—333
- 7 Lorenz E N. Atmospheric predictability experiments with a large numerical model. *Tellus*, 1982, 34: 505—513
- 8 李建平, 曾庆存, 丑纪范. 非线性常微分方程的计算不确定性原理. I. 最值结果. *中国科学 E 辑*, 2000, 30(5): 403—412

- 9 李建平, 曾庆存, 丑纪范. 非线性常微分方程的计算不确定性原理. II. 理论分析. 中国科学 E 辑, 2000, 30(6): 550—567
- 10 穆穆, 李建平, 丑纪范, 等. 气候系统可预报性理论研究. 气候与环境研究, 2002, 7: 227—235
- 11 封国林, 戴新刚, 王爱慧, 等. 混沌系统中可预报性的研究. 物理学报, 2001, 50: 606—611
- 12 Gao X Q, Feng G L, Chou J F, et al. On the predictability of chaotic systems with respect to maximally effective computation time. *Acta Mech Sin*, 2003, 19: 134—139
- 13 Dalcher A, Kalnay E. Error growth and predictability in operational ECMWF forecasts. *Tellus A*, 1987, 39: 474—491
- 14 Arpe K, Klinker E. Systematic errors of the ECMWF operational forecasting model in mid-latitudes. *Quart J Royal Meteorol Soc*, 1986, 112: 181—202
- 15 杨培才, 陈烈庭. 埃尔尼诺/南方涛动的可预报性. 大气科学, 1990, 14: 64—71
- 16 杨培才, 刘锦丽, 杨硕文. 低层大气运动的混沌吸引子. 大气科学, 1990, 14: 335—341
- 17 郑祖光, 刘式达. 用大气湍流资料计算 Lyapunov 指数和分数维. 气象学报, 1988, 46(1): 41—48
- 18 Farmer J D, Ott E, Yorke J A. The dimension of chaotic attractors. *Physica D*, 1983, 7: 153—180
- 19 Grassberger P, Procaccia I. Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach. *Physica D*, 1984, 13: 34—54
- 20 Legras B, Ghil M. Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability. *J Atm Sci*, 1985, 42: 433—471
- 21 Nese J M. PhD dissertation, Predictability of weather and climate in a coupled ocean-atmosphere model: a dynamical systems approach. Pennsylvania State University, 1989
- 22 Nese J M. Quantifying local predictability in phase space. *Physica D*, 1989, 35: 237—250
- 23 Farrell B F. Small error dynamics and the predictability of atmospheric flows. *J Atm Sci*, 1990, 47: 2409—2416
- 24 Houtekamer P L. Variation of the predictability in a low-order spectral model of the atmospheric circulation. *Tellus A*, 1991, 43(3): 177—190
- 25 Yoden S, Nomura M. Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to Atmospheric Predictability. *J Atm Sci*, 1993, 50: 1531—1543
- 26 Kazantsev E. Local Lyapunov exponents of the quasi-geostrophic ocean dynamics. *Appl Math Comput*, 1999, 104: 217—257
- 27 Ziehmann C, Smith L A, Jürgen Kurths. Localized Lyapunov exponents and the prediction of predictability. *Phys Lett A*, 2000, 271: 237—251
- 28 Oseledec V I. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans Mos Math Soc*, 1968, 19: 197—231
- 29 Lacarra J F, Talagrand O. Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus A*, 1988, 40: 81—95
- 30 Tanguay M, Bartello P, Gauthier P. Four-dimension data assimilation with a wide range of scales. *Tellus A*, 1995, 47: 974—997
- 31 Mu M, Guo H, Wang J F, et al. The impact of nonlinear stability and instability on the validity of the tangent linear model. *Adv Atm Sci*, 2000, 17(3): 375—390
- 32 Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov Exponents from a time series. *Physica D*, 1985, 16: 285—317
- 33 李建平, 丑纪范. 利用一维时间序列确定吸引子维数存在的若干问题. 气象学报, 1996, 54(3): 312—323
- 34 Reichler T, Roads J O. Time-space distribution of Long-Range Atmospheric Predictability. *J Atm Sci*, 2004, 61(3): 249—263
- 35 Kumar A, Schubert S D, Suarez M S. Variability and predictability of 200-mb seasonal mean heights during summer and winter. *J Geophys Res*, 2003, 108(D5): 4169, doi: 10.102/2002JD002728
- 36 Bacmeister J T, Pegion P J, Schubert S D, et al. Atlas of seasonal means simulated by the NSIPP1 atmospheric GCM. NASA Tech. Memo. 104606, Goddard Space Flight Center, 2000, 194
- 37 Trenberth K E. Potential predictability of geopotential heights over the Southern Hemisphere. *Month Weath Rev*, 1985, 113: 54—64