

Lorenz 系统的可预报性*

何文平^{1)†} 封国林^{2)†} 董文杰²⁾ 李建平³⁾

1) 扬州大学物理科学与技术学院, 扬州 225002)

2) 国家气候中心, 中国气象局气候研究开放实验室, 北京 100081)

3) 中国科学院大气物理研究所东亚区域气候-环境重点实验室, 北京 100029)

(2005 年 5 月 24 日收到, 2005 年 7 月 4 日收到修改稿)

定义一个动态窗口, 以 Lorenz 模型为预报方程, 通过对落入动态窗口中的粒子数和平均预报 X 分量随积分时间演化规律的分析, 从另一个角度初步研究了 Lorenz 系统的可预报性问题, 并讨论了高斯白噪声对系统可预报性的影响. 结果表明, 落入动态窗口中的粒子数在一定程度上反映了系统的可预报性, 处于不同区域的初值集合预报时限各不相同, 且不同区域内的初值对于小扰动的敏感程度不一样, 对于不同区域内的初值集合, 高斯白噪声对系统的可预报时限的影响各不相同.

关键词: 可预报性, Lorenz, 动态窗口

PACC: 9260X

1. 引 言

由于观测误差如仪器误差, 观测点在空间、时间上的不够密集引起的插值误差, 资料分析、同化处理中导入误差的存在, 造成初始场具有不确定性, 换言之, 我们得到的气象分析资料永远只是实际大气的一个可能的近似值, 而实际大气的真正状态永远不可能被完全精确地描述出来. 由于气象分析资料中存在一定的误差, 以此作为初值通过模式计算得到的数值解, 仅仅是实际大气中可能出现情况的一个可能的解, 而数值预报模式的非线性性质, 使得预报结果对于初始场的微小误差十分敏感, 这个数值解可能离真实值很遥远. 有大量的数值试验和理论研究表明, 在目前的短期数值预报业务中, 模式的物理过程表达已经相当精细, 以至于一般要素预报的误差中有相当大一部分源于初值的误差^[1-7]. 为解决这一难题, 国内外学者做了大量有效的工作, 提出了许多解决初值问题的方法, Epstein^[8] (1969) 首先在理论上提出了动力随机预报, 而后 Leith^[9] (1974) 提出了一个比较适合于实际应用的蒙特卡罗预报. 2003 年, 封国林、董文杰对集合预报的物理基础进行了研究, 将集合预报中的每次积分算程视为非平

衡统计物理理论中的准粒子轨迹, 从理论上说明了做大量积分算程的集合预报较单一初值的单程积分要好, 对集合预报能提高准确率提供了一种物理上的解释^[10-14].

大气系统是一个典型的非线性系统, 具有混沌特性, 这种特性使得任何数值积分模式的预报能力都存在着一定的极限, 而且处在不同区域的初值对各种小扰动的敏感程度也可能各不相同. 因此, 研究不同区域内初值的预测时效有着重大的理论和实践意义. 本文首先给定初值中误差的分布范围, 据此范围, 通过蒙特卡罗法^[15, 16]产生一组可能的初值集合, 在该集合中, 每一个初始场都有同样的概率代表实际大气的真实状态, 从此初值集合出发, 可以相应地得到一个预报值的集合, 然后以 Lorenz 模型为预报方程, 定义一个动态窗口, 通过考察落入动态窗口中的粒子数随积分时间的演化规律, 初步探讨了 Lorenz 系统的可预报性问题, 并讨论了高斯白噪声对于系统的可预报性的影响. 结果表明, 落入窗口中的粒子数随积分时间的演化规律与平均预报 X 分量有着很强的相似性, 在一定程度上反映出了 Lorenz 系统的可预报性, 而且通过计算发现, 高斯白噪声对于不同区域内初值集合的可预报时限的影响各不相同.

* 国家自然科学基金 (批准号 90411008 和 40325015), 国家重点发展基础研究项目 (2004CB418300) 共同资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: feng_gl@sina.com

2. 试验方案

以 Lorenz 模型中 x 分量随积分时间的演化序列为研究对象,先选用一组初值 (x_0, y_0, z_0) ,然后在该组初值附近采用蒙特卡罗法随机产生 2000 个初值(可视为 2000 个粒子),计算每次积分过程中 2000 个粒子的 x 分量的平均值 X ,定义 $X_1 = 0.6 X$, $X_2 = 1.4 X$,考察每次积分过程中 2000 个粒子落入动态窗口 (X_1, X_2) 中的数目和平均预报(即为 2000 个预报值的算术平均值) X 分量随积分时间的变化规律.通过对落入动态窗口的粒子数演化规律的研究,从一个侧面去了解预报值之间的离散度随着积分时间的演化情况,当 Lorenz 系统达到其不可预测的极限时,各个预报值应该以相同的概率出现在混沌区域内,即混沌的遍历性,此后,2000 个预报值之间的离散度非常大,其平均预报值应该接近于 0.

3. 数值试验

含高斯白噪声的 Lorenz 模型为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y + I(t), \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1)$$

这里 σ, r 和 b , 分别是 Prandtl 数, Rayleigh 数以及与对流尺度相联系的参数,其值分别取为 10.0, 8/3, 28.0. $I(t)$ 为一高斯白噪声,即满足

$$I(t) = 0; I(t)I(t') = q\delta(t - t'), \quad (2)$$

其中 $q = 0.01$, 为噪声强度. 此时方程 (1) 存在三个不稳定的平衡点, 分别为 $(0.0, 0.0, 0.0)$ $(8.4853, 8.4853, 27)$ 和 $(-8.4853, -8.4853, 27)$. 由于 Lorenz 方程对 z 轴的对称性, 类似于文献 [10] 本文考虑从 $(0.0, 0.0, 0.0) \rightarrow (-0.5, -0.5, 0.5) \rightarrow \dots \rightarrow (-7.5, -7.5, 18.5) \rightarrow (-8.4, -8.4, 26.9)$ 中的一条轨迹上取不同区域的初值集合来进行研究, 并在所取的各个初值附近, 采用蒙特卡罗法随机产生 2000 个初值. (1) 式采用四阶 Runge-Kutta 法求解, 积分步长取为 0.01, 每积分一步, 分别计算平均预报分量 X 和落入动态窗口的粒子数 n . 文中 3.1 节与 3.2 节为 Lorenz 系统不受高斯白噪声作用时(即 $I(t) = 0$)所做的数值试验, 在高斯白噪声作用下, 3.3 节对 Lorenz 系统的可预报性进行了研究.

3.1. 初值集合远离不稳定平衡点

由图 1(a) 可以看出, 在积分刚开始的一段时间里(积分约 58 步), 平均预报 X 由负值变为正值, 随后到积分 1552 步的过程中, 平均预报 X 一直为正, 且呈振幅渐渐变大的振荡变化, 在此过程中, 2000 个粒子中的绝大部分均在吸引域 Attract1(该吸引域的 X 值大于 0, 另一个吸引域我们称之为 Attract2, 在此吸引域内 X 的值小于 0, 下同)中运动, 其运动轨迹的曲率随着积分时间的增加逐渐变小, 积分约 1553 步时, 平均预报 X 由正值变为负值, 此后 X 的变化越来越小, 渐渐减小为 0(约积分 2000 步). Lorenz 系统的平均预报 X 随积分时间的演化之所以出现上述情形, 主要是由于积分刚开始的一段时间内, 各个粒子迅速进入吸引域 Attract1, 因此平均预报 x 分量由负值逐渐变为正值, 随后(即积分 58 步时)

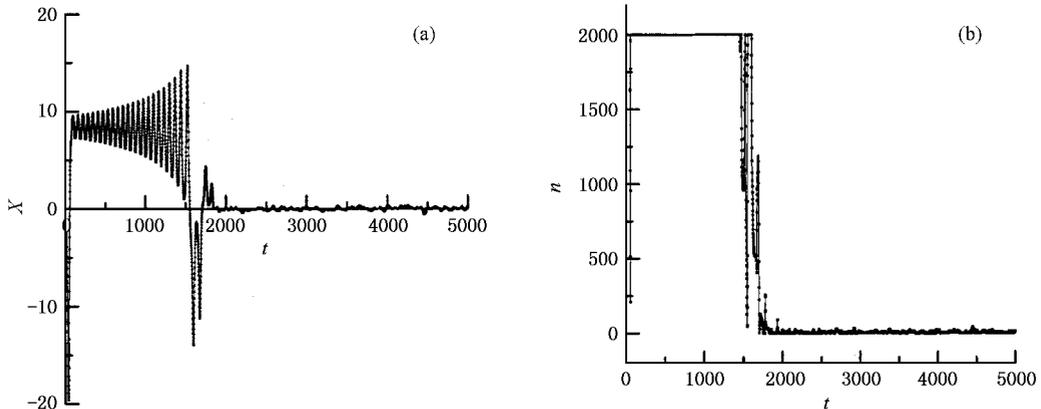


图 1 初值集合处在 $(-0.5, -0.5, 0.5)$ 附近, Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间 t (即迭代步数, 下同) 的演化图 (a) 平均预报 X 分量 (b) 落入动态窗口中的粒子数 n

到积分 1552 步的过程中,大部分粒子一直在吸引域 $Attract1$ 内运动,各个粒子之间的差别,即各预报值之间的离散度较小,此时系统处于可预报的范围之内,当积分 1552 步后,大部分粒子已经进入吸引域 $Attract2$ 之中,但在刚进入的一段时间内各预报值之间的差别仍然不是十分明显,随着积分时间的增长,这种差别慢慢的变大,当积分到 1860 步后,无论积分时间如何增长, X 分量的值始终在 0 附近呈小幅度振荡变化,几乎接近于 0,此后系统的未来行为完全无法预测。

定义积分到某一时刻,落入动态窗口中的粒子数占粒子总数的比例不小于 60%,即认为 Lorenz 系统是可预报的。由图 1(b)可知,从积分开始到积分 53 步的过程中,2000 个粒子全部落入动态窗口之中,随着积分时间的延长,落入动态窗口中的粒子数有所减少,当积分 58 步时,落入动态窗口中的粒子数减小到 210 个,随后,落入动态窗口中的粒子数迅速增加到 2000 个(积分 61 步),此后直到积分 1455 步的过程中,2000 个粒子始终落入动态窗口之中。在积分步数由 1456 增加到 1467 的过程中,落入动态窗口中的粒子数先减小后增多,此过程中动态窗

口中的粒子数占总粒子数的比例始终大于 60%。当积分到 1468 步时,落入动态窗口之中的粒子数增加到 2000 个,这种情况一直持续到 1478 步,此后到 1525 步的过程中,落入动态窗口之中的粒子数先迅速减小,而后又立即增多,当积分步数再增加一步时,落入动态窗口之中的粒子数再次增加到 2000 个,直到 1529 步,此后落入动态窗口之中的粒子数减小到 1552 步时的 45 个,随着积分时间的增加,落入动态窗口中的粒子数迅速增加到 2000 个,直到积分到 1607 步,此后落入动态窗口之中的粒子数随着积分时间的延长,渐渐减少,当积分到 1615 步以后,不管积分时间如何增长,落入动态窗口中的粒子数始终少于总粒子数的 60%,此即可以认为是 Lorenz 系统就初值集合处于 $(-0.5, -0.5, 0.5)$ 附近时的预报极限,约 12.1 天(积分步长 0.01 相当于实际大气演化 10 分钟)。当积分 1800 步后,落入动态窗口之中的粒子数渐渐趋于 0。此后,2000 个粒子的预报值之间的离散度逐渐变大,预报集合中各个成员的差别也愈来愈明显,Lorenz 系统未来的行为完全无法预测。计算结果表明,此时若进一步将动态窗口开的稍微再大点,得到的结论几乎完全一致。

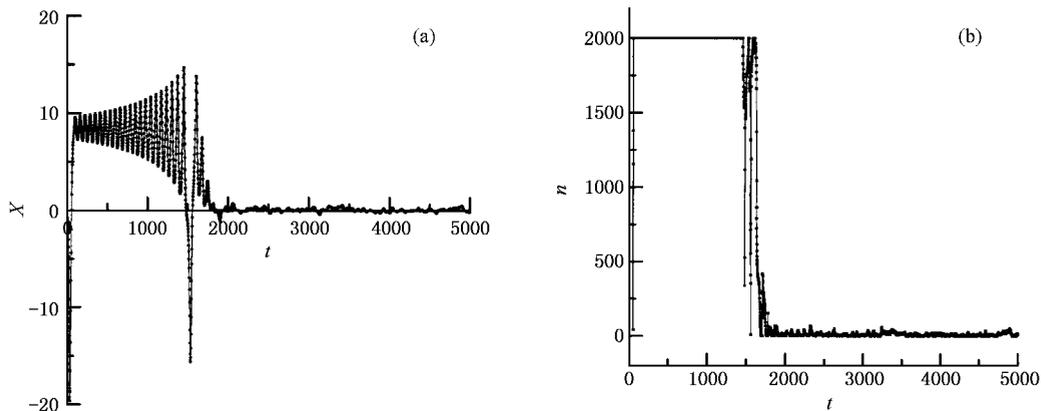


图 2 初值集合处在 $(-0.7, -0.7, 0.6)$ 附近, Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子 n 随积分时间的演化图 (a) 平均预报 X 分量 (b) 落入动态窗口中的粒子数 n

图 2 给出了初值集合处在 $(-0.7, -0.7, 0.6)$ 附近,平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化曲线。由图 2(a)可见,在积分步数分别为 51, 1482, 1560 时,平均预报 X 分量的符号发生了突变,当积分 1950 步以后,平均预报 X 的变化十分微小,始终在 0 附近呈小振幅振荡变化。在图 2(b)中,从积分开始到积分 8.05 天(即 1549 步)的过程中,除在积分步数由 54 增加到 56 时,动态窗口

中的粒子数有些变化外,在其余积分时间里,2000 个粒子全部落入动态窗口之中,随着积分时间的增加,落入动态窗口中的粒子数的变化幅度较大,当积分 1632 步时,落入动态窗口之中的粒子数减小到 1317 个,此后落入动态窗口中的粒子数占总粒子数的比例始终小于 60%,当积分 1694 步以后,落入动态窗口中的粒子数渐渐趋于 0。比较图 2(a)和图 2(b)可以发现,落入动态窗口中的粒子数发生变化的

过程正好是平均预报 X 分量的符号发生变化的过程,这一过程中,2000 个粒子的预报值之间的离散度变大,但随着积分时间的增加,这种离散度又很快开始变小,当超出系统的可预报时效后,2000 个粒子的预报值之间的离散度渐渐变大,落入动态窗口中的粒子数渐渐趋于 0.根据可预报性的定义,当初值集合处于 $(-0.7, -0.7, 0.6)$ 附近时,Lorenz 系统的可预报时限为 11.3 天(1632 步).从 1633 步开始,系统的可预报性变得越来越差,当积分 1694 步以后落入动态窗口的粒子数几乎趋于 0,系统的未来行为完全无法预测.

当初值集合处在 $(-1.0, -1.0, 3.0)$ 附近时,由图 3(a)和 3(b)可以看出,在积分步数分别为 5,981,1058,1217 时,平均预报 X 分量的符号发生了突变,在积分约 1500 步后,其值渐渐趋于 0;在积分 1272

步以后,不论积分时间如何增长,落入动态窗口中的粒子数占总粒子数的比例始终小于 60%,当积分超过 1400 步后,落入动态窗口中的粒子数变化十分微小,渐渐趋于 0,此后 2000 个粒子遍历于整个混沌区域,其行为完全无法预测.可见,当初值集合处在 $(-1.0, -1.0, 3.0)$ 附近时,Lorenz 系统的可预报时限为 1284 步,即 8.92 天.

图 3(c)和 3(d)为初值集合在 $(-1.5, -1.5, 3.5)$ 附近时,平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化图.从图中可以发现,当初值处于 $(-1.5, -1.5, 3.5)$ 附近时,在积分到 1137 步以后,落入动态窗口中的粒子数 n 占总粒子数的比例开始低于 60%,也即预报时限为 7.8 天,积分约 1400 步后,集合平均预报 X 的值和落入动态窗口之中的粒子数的变化十分微小几乎接近于 0.

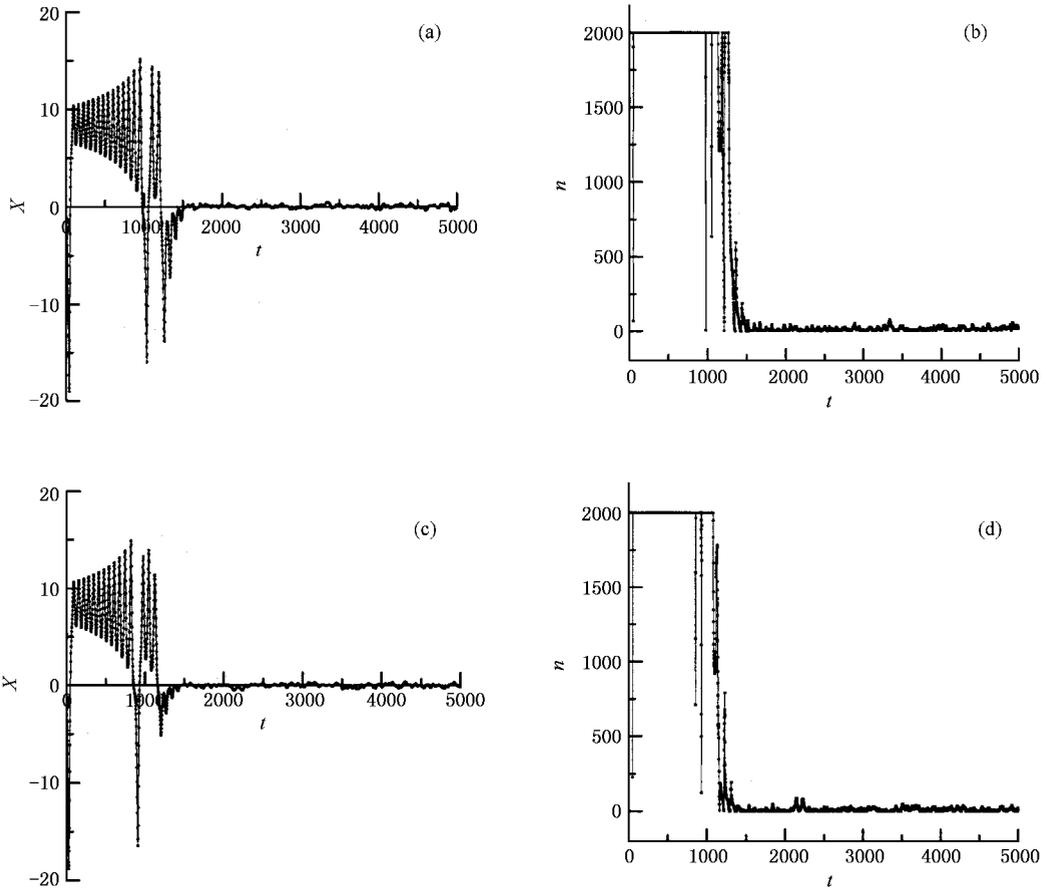


图 3 Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口的粒子数 n 随积分时间的演化图 (a)(b)初值集合在 $(-1.0, -1.0, 3.0)$ 附近 (c)(d)初值集合在 $(-1.5, -1.5, 3.5)$ 附近

从图 4(a)中可以看出,Lorenz 系统的平均预报 X 分量的符号在积分时间分别为 0.36 天(52 步),4.18 天(602 步)4.71 天(679 步)5.77 天(831 步),

6.33 天(911 步)6.87 天(989 步)7.69 天(1108 步)发生了突变,且随着积分时间的延长,当积分 1400 步后,Lorenz 系统的平均预报分量 X 的变化很小,其

值几乎接近于 0.由图 4 (b)可以发现,从积分开始到积分 6.29 天(905 步)的过程中,落入动态窗口中的粒子数除在积分时刻或区间分别为 52,601—602,678,831—832 时有一些变化外,其余时间内,2000 个粒子均处在该窗口之中.此后随着积分时间进一步增加,落入动态窗口中的粒子数渐渐变少,当积分

到 1048 步(此时落入动态窗口的粒子数为 1207 个,其占总粒子数的比例大于 60%)后,无论积分时间如何增加,落入动态窗口中的粒子数占总粒子数的比例始终小于 60%,系统的行为变得越来越不可预测.因此,当初值集合处在 $(-1.7, -1.7, 5.6)$ 附近时,Lorenz 系统的预报时限为 7.28 天.

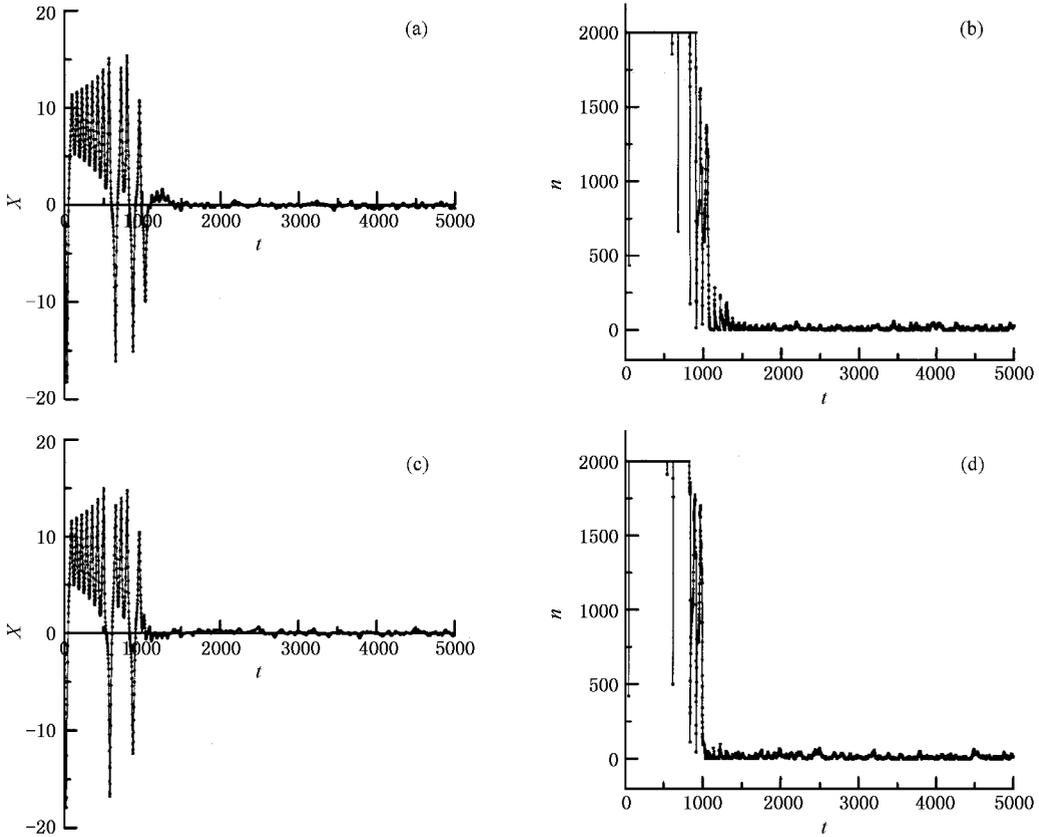


图 4 Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化图 (a)(b)初值在集合 $(-1.7, -1.7, 5.6)$ 附近 (c)(d)初值集合在 $(-2.0, -2.0, 6.0)$ 附近

图 4 (c)和 4(d)为初值集合在 $(-2.0, -2.0, 6.0)$ 附近时,Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化图.从图中可以发现,Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化规律类似于图 4 (a)和 4 (b),在积分 987 步以后,落入动态窗口中的粒子数 n 占总粒子数的比例开始低于 60%,在积分约 1200 步以后,集合平均预报 X 的值的微小变化十分微小,以 0 为中心做小幅振荡.当初值集合处在 $(-2.0, -2.0, 6.0)$ 附近时,Lorenz 系统的预报时限为 6.85 天.

口中的粒子数 n 随积分时间的演化曲线.由图 5 (a)可见,平均预报 X 分量在积分步数分别为 49,471,548,701,781 时,其符号发生了突变,当积分步数约为 1000 时,平均预报 X 的值渐渐趋于 0.从积分开始到 4.85 天(698 步)的过程中,2000 个粒子全部落入动态窗口之中(见图 5 (b)),随着积分时间的增加,落入动态窗口中的粒子数发生了急剧的变化,时而减少,时而增多,当积分约 835 步后(此时落入窗口中的粒子数为 1225 个),不论积分时间如何增加,落入动态窗口中的粒子数占总粒子数的比例始终小于 60%,其值在积分步数达到 1000 以后渐渐趋于 0.由此可见,初值集合处在 $(-2.5, -2.5, 6.5)$ 附近,Lorenz 系统的预报时限约为 5.8 天.

图 5 给出了初值集合处在 $(-2.5, -2.5, 6.5)$ 附近,Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗

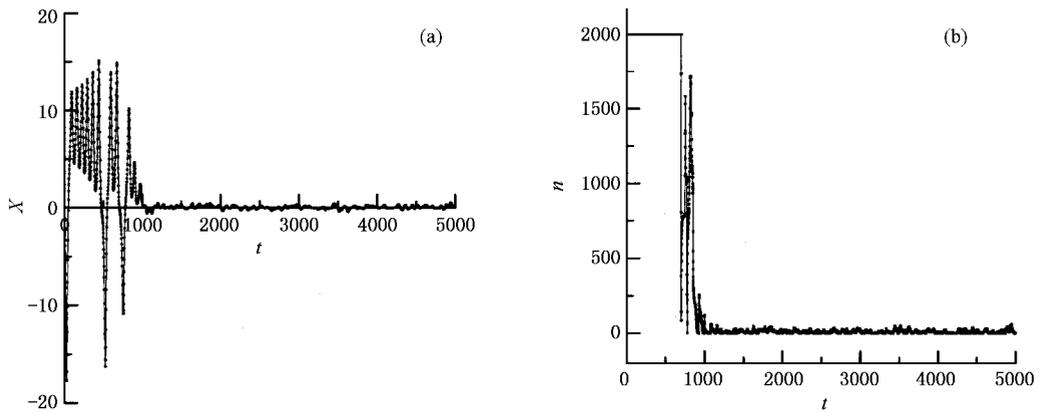


图 5 初值集合处在 $(-2.5, -2.5, 6.5)$ 附近, Lorenz 系统的平均预报 X 和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化图 (a) 平均预报 X 分量 (b) 动态窗口中的粒子数 n

由以上分析可以发现,落入动态窗口中的粒子数随积分时间的演化规律与平均预报 X 分量有着极好的对应关系,落入动态窗口中的粒子数 n 接近于 0 与平均预报 X 分量的值减小到 0 各自所需的时间几乎一致.当初值集合分别处在 $(-0.5, -0.5, 0.5)$ $(-0.7, -0.7, 0.6)$ $(-1.5, -1.5, 3.5)$, $(-1.7, -1.7, 5.6)$ $(-2.0, -2.0, 6.0)$ $(-2.5, -2.5, 6.5)$ 附近时, Lorenz 系统的预报时限分别为: 12.1 天, 11.3 天, 8.92 天, 7.8 天, 7.28 天, 6.85 天, 5.8 天.处于不同区域内的初值集合其预报时限各不相同,因此,虽然 Lorenz 系统是一个高度非线性的系统,对于小扰动十分敏感,但不同区域内的初值对于小扰动的敏感程度并不一样.当积分时间超过

Lorenz 系统的预报时效后,其预报结果的可信度变得越来越差,与随机预报的情况没有两样.

3.2. 初值集合在不稳定平衡点附近

从图 6(a) 中我们可以发现,平均预报 X 分量在积分步数分别为 85, 1854, 1938, 2019, 2169 时,其符号发生了突变,当积分步数约为 2200 时,平均预报 X 的值渐渐趋于 0.由图 6(b) 可知,当积分时间增加到 1930 步(即 13.4 天)以后,不论积分时间如何增加,落入动态窗口中的粒子数占总粒子数的比例始终小于 60%,此后落入动态窗口中的粒子数逐渐减少,渐渐趋于 0.由此可见,初值集合处在 $(0.0, 0.05, 0.05)$ 附近, Lorenz 系统的预报时限约为 13.4 天.

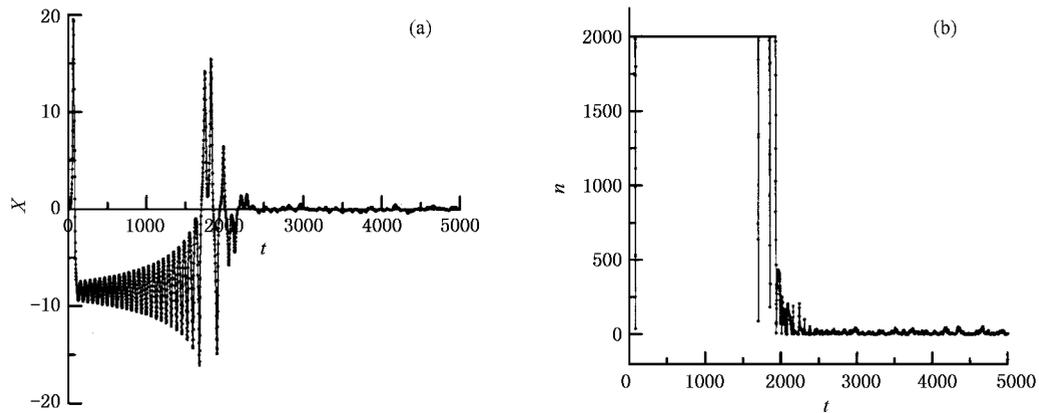


图 6 初值集合处在 $(0.0, 0.05, 0.05)$ 附近, Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化图 (a) 平均预报 X 分量 (b) 动态窗口中的粒子数 n

从图 7(a) 可以看出,从积分开始到积分 4241 步的过程中, Lorenz 系统的平均预报 X 分量一直为负,在此过程中,大部分粒子都处在吸引域 Atract2 中,

当积分步数由 4242 增加到 4331 时,大部分粒子进入吸引域 Atract1 中,平均预报 X 分量的符号由负变为正,当积分到 4332 步时,平均预报 X 分量的符号

再一次发生变化,由正值变为负值,随着积分时间的进一步平均预报 X 分量的符号分别在积分步数为 4614 和 4715 时发生突变,此后,由于 Lorenz 系统的混沌特性,2000 个粒子渐渐遍布于吸引域的各个方位,平均预报 X 分量的值慢慢趋于 0.由图 7 (b)可以发现,从积分开始到 3512 步的过程中,2000 个粒子全部落入动态窗口之中,此过程中,Lorenz 系统的平均预报 X 分量随积分时间的增加,呈现振荡变化,且振幅逐渐变大(见图 7 (a)).此后到积分步数

达到 3924 的过程中,落入动态窗口中的粒子数占粒子总数的比例始终大于 60%,系统处于可预报范围之内,在当积分 4047 步以后,无论积分时间如何增加,落入窗口中的粒子数占总粒子数的比例始终小于 60%,此即可认为初值集合处在 $(-8.4, -8.4, 26.9)$ 附近时,Lorenz 系统的预报时限,即 28.1 天.此后落入动态窗口中的粒子数渐渐减小,到积分 4600 步时,几乎接近于 0,此后系统已毫无预报性可言.

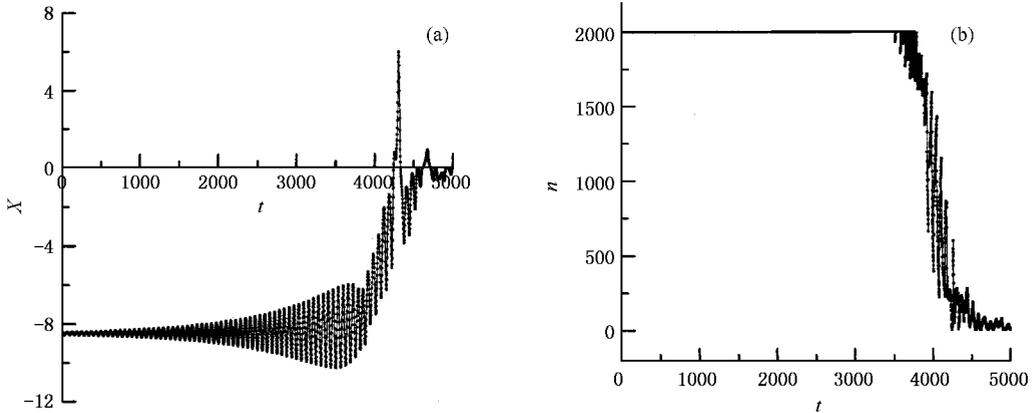


图 7 初值集合处在 $(-8.4, -8.4, 26.9)$ 附近,Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化图 (a)平均预报 X 分量 (b)落入动态窗口中的粒子数 n

由图 8 (a)可以看出,在积分步数分别为 343, 571, 658 时,平均预报 X 分量的符号发生了突变.当积分约 1000 步后,Lorenz 系统的平均预报 X 分量的值变化极小,几乎趋于 0.在积分初到积分 493 步的过程中,除积分步数由 337 增大到 346 时,落入动态窗口中的粒子数有所变化外,在其余积分时间里,2000 个粒子全部落入该动态窗口中.当积分到 494

步后,落入动态窗口中的粒子数先减小而后又迅速增加,到 541 步时,2000 个粒子全部落入动态窗口之中.当积分到 549 步时,落入动态窗口中的粒子数又开始迅速减少,而后立即增多,到 624 步时,落入动态窗口中的粒子数增加到 1972 个,此后落入动态窗口中的粒子数渐渐减小,到 637 步后,无论积分时间如何增加,落入动态窗口中的粒子数占总粒子数的

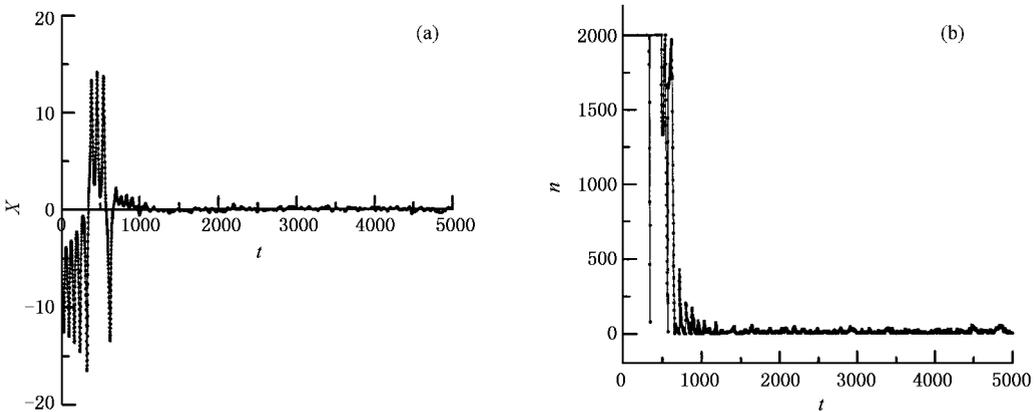


图 8 初值集合处在 $(-7.5, -7.5, 18.5)$ 附近,Lorenz 系统的平均预报 X 分量和落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化图 (a)平均预报 X 分量 (b)落入动态窗口中的粒子数 n

比例始终小于 60%.

通过对系统在两不稳定平衡点附近的可预报性的数值试验,我们发现系统在两个不稳定平衡点附近的可预报时限相差较大,当初值处于不稳定平衡点 $(-8.4853, -8.4853, 27)$ 附近时,外界微小扰动对系统未来演化趋势的影响不大,其预报时效很长,这对于实际的数值预报可能具有一定的借鉴意义.

3.3. 含高斯白噪声的 Lorenz 系统

图 9 为 Lorenz 系统在受高斯白噪声作用的情况下,落入动态窗口中的粒子数随积分时间的演化曲线.由图 9 可以发现,当初值集合处在 $(-0.7, -0.7, 0.6)$ 和 $(-8.4, -8.4, 26.9)$ 附近时,系统的可

预报时限分别为 1636 步, 3902 步.可见,在当初值集合处在 $(-0.7, -0.7, 0.6)$ 附近时,白噪声对系统的可预报时限的影响不大(无白噪声作用时系统的预报时限为 1632 步,相差 4 步);而当初值集合处在 $(-8.4, -8.4, 26.9)$ 附近时,白噪声的影响较大,使得系统的可预报时限变短(无白噪声作用时系统的预报时限为 4047 步).在其他初值附近也做了类似试验,当初值集合处在 $(-1.0, -1.0, 3.0)$ $(-7.5, -7.5, 18.5)$ 附近时,高斯白噪声对于系统的可预报时限的影响不大,而当初值集合处在文中所取的其他值附近时,高斯白噪声对于系统的可预报时限的影响较大,其受影响的程度与初值集合处在 $(-8.4, -8.4, 26.9)$ 附近时相当.

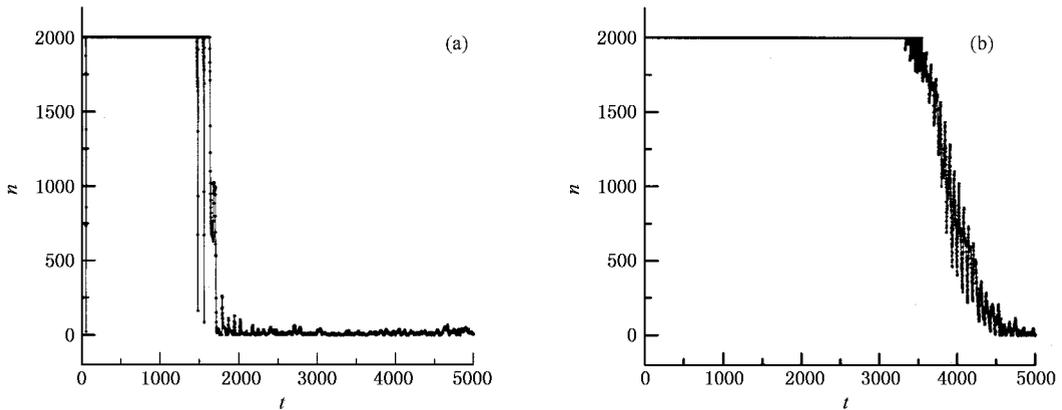


图 9 Lorenz 系统受高斯白噪声作用时,落入动态窗口中的粒子数 n 随积分时间的演化图 (a) 初值集合处在 $(-0.7, -0.7, 0.6)$, (b) 初值集合处在 $(-8.4, -8.4, 26.9)$ 附近

4. 结 论

本文定义了一个动态窗口,以 Lorenz 模型为预报方程,在其吸引域中的一条可能的轨迹上选取不同区域内的初值集合,通过考察落入动态窗口中的粒子数目 n 和 Lorenz 系统的平均预报 X 分量随积分时间的演化规律,初步研究了 Lorenz 系统的可预报性问题,并讨论了高斯白噪声对该系统可预报性的影响.计算结果表明:1) Lorenz 系统有一个预报极限,超出这个极限,预报结果的可信度很低,与随机预报相差无几;2) 处在不同区域的初值集合其预报时限各不相同,且不同区域内的初值对于小扰动的

敏感程度不一样;3) 当初值集合靠近不稳定平衡点 $(-8.4853, -8.4853, 27)$ 附近时, Lorenz 系统的可预报时效较长,甚至在某些特殊的地方系统的预报时效相当长,如当初值集合处在 $(-8.4, -8.4, 26.9)$ 附近时, Lorenz 系统的预报时效为 28.1 天,突破了传统的短期数值天气预报时效为 1—2 个星期的极限,值得深入研究;4) 对于不同区域内的初值集合,高斯白噪声对于系统的可预报时限的影响各不相同,在某些初值附近,高斯白噪声对于系统的可预报性的影响几乎可以忽略,而在某些初值附近,高斯白噪声对于系统的可预报性的影响较大,但其影响的程度大体相同(有噪声的影响使得系统的可预报时限约缩短 0.7 天,即积分 100 步左右).

- [1] Dai X G , Fu C B , Wang P 2005 *Chin. Phys.* **14** 850
- [2] Dai X G , Wang P , Chou J F 2004 *Progress in Chinese Science* **60** 544
- [3] Liu S S , Fu Z T , Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、符遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]
- [4] Liu S D , Fu Z T , Liu S S *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、符遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]
- [5] Shi N 2005 *Chin. Phys.* **14** 844
- [6] Du J. 2002 *J. Applied Meteorology* **13** 16(in Chinese) [杜 钧 2002 应用气象学报 **2002** **13** 16]
- [7] Lorenz E N 1965 *Tellus* **17** 321
- [8] Epstein E S 1969 *Tellus* **21** 739
- [9] Leith C E 1974 *Mon. Wea. Rev.* **102** 409
- [10] Feng G L , Dong W J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2347(in Chinese) [封国林、董文杰 2003 物理学报 **52** 2347]
- [11] Feng G L , Cao H X , Dong W J *et al* 2001 *Chin. Phys.* **10** 1004
- [12] Feng G L , Dong W J 2003 *Chin. Phys.* **12** 1076
- [13] Feng G L , Dong W J , Jia X J 2004 *Chin. Phys.* **13** 413
- [14] Hou W , Feng G L , Dong W J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3940(in Chinese) [侯 威、封国林、董文杰 2005 物理学报 **54** 3940]
- [15] Mullen S L 1994 *Mon. Wea. Rev.* **122** 1548
- [16] Du J , Mullen S L , Sanders P 1997 *Mon. Wea. Rev.* **125** 2427

On the predictability of the Lorenz system^{*}

He Wen-Ping^{1)†} Feng Guo-Lin^{2)†} Dong Wen-Jie²⁾ Li Jian-ping³⁾

¹⁾ Department of Physics , Yangzhou University , Yangzhou 225009 , China)

²⁾ Laboratory for Climate Studies , National Climate Center , China Meteorological Administration , Beijing 100081 , China)

³⁾ Key Laboratory of Regional Climate-Environment for Temperate East Asia , Institute of Atmospheric Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100029 , China)

(Received 24 May 2005 ; revised manuscript received 4 July 2005)

Abstract

Regarding Lorenz model as the forecast equation , this paper investigates the evolution of the number of particles falling into the predefined dynamic window and the average forecast weight X of the Lorenz system. Then we research preliminarily the predictability of the Lorenz system from another point of views , and the influence of the Gaussian white noises on the Lorenz system. The results show that the evolution of the number reflects the predictability of the Lorenz system to a certain extent. For initial value sets in different areas , there are different predictabilities of the Lorenz system , and we find that there are different influences on the Lorenz system from the Gaussian white noises.

Keywords : predictability , Lorenz system , dynamic window

PACC : 9260X

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90411008 and 40325015) , the National Key Program Development for Basic Research (Grant No. 2004CB418300).

[†] Corresponding author. E-mail : feng_gl@sina.com