绝热大气过程的若干性质*

高 丽[1,2] 李建平[1] 任宏利[3]

1. 中国科学院大气物理研究所LASG，北京100029；2. 中国科学院研究生院，北京100049；
3. 兰州大学大气科学学院，兰州730000

摘要 研究了绝热大气过程的若干重要性质，论证了绝热情形下大气熵范围的不变性和表面位温的局地不变性，在此基础上进一步探讨了当等熵面与地面相交时等熵面上以及等熵面与地面之间大气质量的守恒性. 分析表明：在大气有效位能研究中，客观定义的大气参考状态应当是实际大气经过绝热调整后所能够达到的状态，是与调整前大气状态有关的，不同时刻的实际大气对应的参考状态应是不同的，而Lorenz所定义的大气参考状态是绝热调整无法达到的；进而提出了利用条件最小全位能的新概念来研究大气有效位能.

关键词 有效位能 绝热 等熵面 大气参考状态 条件最小全位能

有效位能(APE)的研究一直是大气能量学的重要组成部分. Lorenz[1,2]首先发展了Margules[3]关于风暴有效能量的概念，给出了近似和精确的两种全球平均APE定义及其产生的表达形式，但在推导过程中引入了诸如静力平衡、稳定大气层结、不考虑地形以及忽略潜热能贡献等假定. 随后的许多工作都致力于去掉这些假设，例如，Dutton和Johnson得到了非静力近似下更为准确的公式和方程[4]、Lorenz在新的推导过程中考虑了水汽过程[5]、Taylor则引入了地形影响[6]. 同时，Lorenz的全球APE定义也被扩展到区域尺度，用于研究风暴产生过程中APE的变化[7—10]. 近些年，APE的概念也从不同方面得到了新的发展[11—13]，并被广泛应用于大气、海洋能量学的研究中[14—18].

在上述有关APE的理论推导或实际估算中，定义一个适当的绝热调整后的大气参考状态是至关重要的. Lorenz最早给出不考虑地形的大气参考状态是正压水平的、具有稳定层结和最小全位能[1,2,5]，后人在此基础上进一步提出了考虑地形存在的大气参考状态[6]，等等. 这样的定义都是直接从物理上设计大气参考状态的分布形态，并没有从数学上探讨绝热情形下等熵面上大气的若干性质，也未能从数学和物理两方面对这样的大气参考状态是实际大气状态通过怎样的绝热调整而达到，或是否能够进行严格的证明，这些基本而关键的问题对于认识大气参考状态及有效位能的概念和计算有着十分重要的意义.

1 绝热调整过程中表面位温变化

按照Lorenz定义[1,2]，用实际大气的全位能(TPE)减去经绝热调整到大气参考状态时的最小全位能(MTPE)，就得到了有效位能的数学表达式. 他所给出的大气参考状态是大气经过绝热调整后所具有的水平、正压、稳定层结和最小全位能的状态. 由于没有考虑地形，因此参考状态时大气的均匀表面位温就是调整前的最小表面位温. Taylor[6]在考虑了地形后，给出了两种大气参考状态：一种是在Lorenz的参考状态中直接加上起伏的地形，系统具有最小熵；另一种是地形表面具有均匀气压，等熵面随地形起伏，系统具有最小焓. 可以看出，

2005-06-07收稿，2005-09-08收修改稿

* 国家杰出青年科学基金(批准号：40325015)和国家重点基础研究发展规划(批准号：2006CB400503)资助项目

E-mail：gaoli@mail.iap.ac.cn

依据不同研究目标而设计的参考状态差别很大，而且这样的参考状态是否能够通过实际大气经过绝热调整而得到呢？我们无法从他们的工作中得到严格的数学证明.

实际上，我们完全可以从调整前的实际大气入手，从而推出大气在绝热调整过程中所呈现的一些性质. 从以往定义的大气参考状态来看，对于表面位温的描述差别很大. 因此，我们将首先探讨表面位温在绝热调整过程中的变化情况.

为了讨论方便，首先给出球面等熵坐标系(λ，φ，θ，t)(其中 λ，φ 分别表示球面上的经度和纬度，$\lambda\in[0,2\pi]$，$\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$，θ 为位温，t 为时间)中的边界条件如下[19,20]：

上边界：当 $\theta=\theta_T=$常数，

$$\dot{\theta}_T=0\ . \tag{1}$$

下边界：当 $\theta=\theta_S(\lambda,\varphi,t)$，

$$\dot{\theta}_S=\frac{\partial\theta_S}{\partial t}+\frac{u_S}{a\cos\varphi}\frac{\partial\theta_S}{\partial\lambda}+\frac{v_S}{a}\frac{\partial\theta_S}{\partial\varphi}\ . \tag{2}$$

上述 θ_T，θ_S 分别表示大气上界和地表面的位温值，u_S，v_S 分别为地面纬向和经向风速，a 是地球平均半径.

在绝热条件下，气块位温保持不变，即 $\mathrm{d}\theta=0$，垂直 θ 速度 $\dot{\theta}=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=0$，因此，等熵面是物质面. 在绝热调整过程中，物质面既不会消失，也不会被创造，不存在穿越等熵面的运动. 所以，有

性质1　如果大气运动以绝热过程进行，那么任一时刻大气熵或位温的整体范围保持不变.

这个性质是容易证明的. 设初始时刻整个大气位温的范围为$[\theta_{\min}(0),\theta_{\max}(0)]$，在任何时刻 t 时范围为$[\theta_{\min}(t),\theta_{\max}(t)]$，如果 $\theta_{\min}(t)\neq\theta_{\min}(0)$，$\theta_{\max}(t)\neq\theta_{\max}(0)$，则在绝热调整过程中，必有空气穿越等熵面的运动，从而与前述结论矛盾.

在绝热情形下下边界条件(2)为 $\dot{\theta}_S=0$，在无边界流动[19](即 $\vec{V}_{hS}=0$，相当于粘性下边界条件)或更一般的在无表面熵平流($\vec{V}_{hS}\cdot\nabla\theta_S=0$)的条件下，则可以得到 θ_S 的局地变化为零. 由此可得

性质2　如果大气运动以绝热过程进行且无边界流动或无表面熵平流，那么表面位温具有局地不变性.

这意味着表面“各处”的位温在整个绝热调整过程中始终等于初始实际大气状态的值，在无边界流动或无表面熵平流的约束下，并不会因为大气的调整过程而改变.

在性质1，2的基础上，不难作出如下两个简单推论：

(1) 如果大气运动以绝热过程进行且无表面熵平流，那么任一垂直空气柱中大气熵或位温的范围保持不变.

(2) 如果大气运动以绝热过程进行且无表面熵平流，那么等熵面与地面相交线的位置保持不变.

很明显，上述推导对于有无地形情况均适用. 由此可见，对于有效位能的研究，在实际大气状态向其参考状态的绝热调整过程中，任一处的表面位温均保持不变，故在调整后的参考状态中，与地面相交的等熵面不一定与等位势高度面重合，这正反映出以往研究中对参考态的认识并不客观.

另外，实际上，大气在每时每刻都在发生着非绝热变化，表面位温会随时间而变化，因此，经过绝热调整后的表面位温必然也随时间而变化，这意味着不同时刻的实际大气所对应的参考状态是不同的. 从后面的探讨中，由于质量守恒性质的要求，对于绝热大气过程而言，表面位温的局地不变性显得尤为重要.

2　等熵面上绝热大气过程的质量守恒性质

前面我们已经证明了大气的表面位温在绝热过程中的局地不变性，现在进一步论证等熵面上绝热大气过程的一些性质. 质量守恒性是大气的一个基本属性，对于绝热大气过程中不与地面相交的等熵面上大气质量的守恒性已有文献讨论[1,2,4]，但对于等熵面与地面相交的情形却没有清楚的论述. 而这个问题对于我们深入认识大气参考状态的结构至关重要. 下面就来探讨这个问题.

球面等熵坐标系下的连续性方程可以写成：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta+\frac{1}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(u\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta+\frac{1}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v\cos\varphi\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\dot{\theta}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)=0\ , \tag{3}$$

这里 p 表示气压，u 和 v 表示水平风速. 为了讨论方便，除了前述边界条件(1)和(2)，在大气上边界略去气压倾向项，即 $\partial p\theta_T/\partial t=0$[19,20].

我们主要考虑任一等熵面 θ_1 与地面相交的情形. 令 σ_1 是等熵面 θ_1 上位于地面以上的区域(即如果$(\lambda,\varphi)\in\sigma_1$，那么 $\theta_1\geqslant\theta_S(\lambda,\varphi)$)，$\sigma_{1S}$是位于等熵面 θ_1 以上的地表面区域(即如果$(\lambda,\varphi)\in\sigma_{1S}$，那么 $\theta_1\leqslant\theta_S(\lambda,\varphi)$)，并令 Γ 是等熵面 θ_1 与地面相交的线的集合即边界线 $\Gamma=\sigma_1\cap\sigma_{1S}$. 在等熵面 θ_1 上对(3)式的全球空间积分定义为沿着整个闭合曲面 $\sigma_G=\sigma_1\cup\sigma_{1S}$到大气层顶的积分，因此，利用上边界条件得到

$$\begin{aligned}&\iint_{\sigma_1}\int_{\theta_1}^{\theta_T}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\sigma+\iint_{\sigma_{1S}}\int_{\theta_S}^{\theta_T}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\sigma+\\&\iint_{\sigma_1}\int_{\theta_1}^{\theta_T}\frac{1}{a\cos\varphi}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(u\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta+\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v\cos\varphi\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta\right\}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\sigma+\\&\iint_{\sigma_{1S}}\int_{\theta_S}^{\theta_T}\frac{1}{a\cos\varphi}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(u\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta+\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v\cos\varphi\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta\right\}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\sigma-\\&\iint_{\sigma_1}\dot{\theta}_1\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_1}\mathrm{d}\sigma-\iint_{\sigma_{1S}}\dot{\theta}_S\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_S}\mathrm{d}\sigma=0\ ,\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma=a^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\varphi$ 是水平积分面积元. 因为

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\theta_S}=\frac{\partial p_S}{\partial t}-\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial t}\ ,$$

所以，利用大气上边界条件，(4)式前两项变为

$$\begin{aligned}&\iint_{\sigma_1}\int_{\theta_1}^{\theta_T}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\sigma+\iint_{\sigma_{1S}}\int_{\theta_S}^{\theta_T}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\sigma\\&=-\iint_{\sigma_1}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\theta_1}\mathrm{d}\sigma-\iint_{\sigma_{1S}}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\theta_S}\mathrm{d}\sigma\\&=-\iint_{\sigma_G}\frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}\sigma+\iint_{\sigma_{1S}}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial t}\mathrm{d}\sigma\ .\end{aligned}\tag{5}$$

这样 就得到了整个曲面 σ_G 上的气压倾向积分. 对于任一物理量 A,这里记$\iint_{\sigma_G}A\mathrm{d}\sigma=\iint_{\sigma_1}A_{\theta_1}\mathrm{d}\sigma+\iint_{\sigma_{1S}}A_S\mathrm{d}\sigma$,其中 A_{θ_1} 为物理量 A 在等熵面θ_1 上的值,A_S 是 A 在地表面上的值.

对于(4)式的第四项，根据可变限定积分求导法则可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{\theta_S}^{\theta_T}u\frac{\partial p}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\right]_\theta=\int_{\theta_S}^{\theta_T}\frac{1}{a\cos\varphi}\cdot\\&\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(u\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta\mathrm{d}\theta-\frac{u_S}{a\cos\varphi}\frac{\partial\theta_S}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_S},\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_{\theta_S}^{\theta_T}v\cos\varphi\frac{\partial p}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right]_\theta=\\&\int_{\theta_S}^{\theta_T}\frac{1}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)\right]_\theta\mathrm{d}\theta-\frac{v_S}{a}\frac{\partial\theta_S}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_S}.\end{aligned}\tag{7}$$

所以，将(5)—(7)式代入(4)式有

$$\begin{aligned}&-\iint_{\sigma_G}\frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}\sigma+\iint_{\sigma_{1S}}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial t}\mathrm{d}\sigma+\\&\iint_{\sigma_G}\frac{1}{a\cos\varphi}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{\theta_W}^{\theta_T}u\frac{\partial p}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\right]_\theta+\right.\\&\left.\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\int_{\theta_W}^{\theta_T}v\cos\varphi\frac{\partial p}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\right]_\theta\right\}\mathrm{d}\sigma+\\&\iint_{\sigma_{1S}}\left(\frac{u_S}{a\cos\varphi}\frac{\partial\theta_S}{\partial\lambda}+\frac{v_S}{a}\frac{\partial\theta_S}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_S}\mathrm{d}\sigma-\\&\iint_{\sigma_1}\dot{\theta}_1\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_1}\mathrm{d}\sigma-\iint_{\sigma_{1S}}\dot{\theta}_S\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_S}\mathrm{d}\sigma=0\ ,\end{aligned}$$

其中，当$(\lambda,\varphi)\in\sigma_1$ 时，$\theta_W=\theta_1$；当$(\lambda,\varphi)\in\sigma_{1S}$时，$\theta_W=\theta_S$. 利用下边界条件(2)，进一步有

$$\iint_{\sigma_G}\frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}\sigma=-\iint_{\sigma_1}\dot{\theta}_1\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta_1}\mathrm{d}\sigma\ .\tag{8}$$

对于绝热大气过程而言，上式右端项为0，则有

$$\iint_{\sigma_G}\frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}\sigma=0\ .\tag{9}$$

上式中时间微分能否从表面积分号内移到积分号外，取决于边界线 $\Gamma=\sigma_1\cap\sigma_{1S}$是否随时间变化. 由性质2的推论(2)所知，当无表面熵平流时，等熵面与地面的相交线(即边界线 Γ)保持不变，这时由(9)式可得闭合曲面 σ_G 上的大气质量守恒

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{\sigma_G}\frac{p}{g}\mathrm{d}\sigma\right)=0\ .\tag{10}$$

其中，g 为重力加速度. 特别地，如果 $\sigma_{1S}=\varnothing$，这里 $\varnothing$ 表示空集，则等熵面不与地面相交，此时，$\sigma_1=\sigma_G$，(10)式结论依然成立. 另一方面，如果 $\sigma_1=\varnothing$，则 $\sigma_S=\sigma_G$，(10)式就表示整个大气总质量守恒. 这样我们就得到

性质3 如果大气运动以绝热过程进行，不与地面相交的等熵面上的大气质量守恒；若等熵面与地面相交，而且在无表面熵平流时，那么闭合曲面 σ_G 上的大气质量守恒.

并由此可以作如下推论：

推论 如果大气运动以绝热过程进行且无表面熵平流时，那么

(1) 任意两个连续等熵面之间的大气总质量守恒.

(2) 地面与任意等熵面之间的大气总质量守恒.

从上面的推导可以看出，在绝热大气过程中，如果存在表面熵平流，即表面位温随时间变化，那么就无法从(9)式导得(10)式，因此，对于与地面相交的等熵面上大气质量就不守恒. 由质量守恒性的要求，对于绝热大气过程而言，无表面熵平流或者说表面位温的局地不变性应是一个基本的物理约束条件. 这对于认识大气的参考状态是很重要的，下面将讨论相关的一些问题.

3 条件最小全位能

由于大气的参考状态是由实际大气绝热调整得到，按照性质3，被等熵面和地面所封闭起来的大气质量在调整前后是不变的，但其分布会改变，即具有最小全位能. 由于前面已经论证从不同的调整前大气状态出发，会得到不同的参考状态，所以我们认为这样的最小是有条件的，依赖于不同时间的大气原始状态分布，这里称其为条件最小全位能. 在向大气参考状态的绝热调整过程中，不仅要求气块的位温保持不变，而且要求气块的质量也保持不变. 由于质量守恒性的要求，与地面相交的等熵面在绝热调整过程中等熵面与地面的交线是固定的，不能随时间发生改变的. 因此，Lorenz 所定义的水平等熵面的理想大气参考状态[1,2]可能由绝热调整根本达不到，是参考状态全位能的一个下限，可称为绝对最小全位能.

Lorenz 定义的 APE 表达式[1,2]中，被积函数就是单位气柱的 TPE 减去 MTPE，为了保证绝热调整前后任一气柱的垂直积分限相同(即都具有一致的等熵面层)，Lorenz 进行如下延拓(称为 Lorenz 延拓)：当 $\theta<\theta_S(\lambda,\varphi)$ 时，$p(\lambda,\varphi,\theta)=p_S(\lambda,\varphi)$，即地面以下的各点气压取为对应的表面气压，这样就可以保证所有等熵面都是闭合连续的. 采用了 Lorenz 延拓虽然在数学上可行，但在物理上却是无法实现的，这是因为，由于质量守恒的约束，在绝热调整过程中与地面相交的等熵面是不会调整到水平状态的. 现在看来，其实没有必要假设等熵面与地面相交后的拓展情形，因为表面位温在绝热条件下具有不变性，那么，任何为了某种研究目的或需要而设计的参考状态都是不客观的，而且，由当前大气状态进行调整可能根本无法达到这种参考状态.

另一方面，由于等熵面与地面相交线的位置在绝热情形下是不变的，因此，任何具有不同表面位温分布的大气状态，经过绝热调整后的参考状态也应该是不同的. 当地面以上的等熵面大气进行绝热调整后，形成一种对应于原始状态所特有的参考状态，理论上，它应该是存在惟一的. 此时，如果以具有最小全位能作为标准，确定参考状态的问题就转化为在固定边界位温约束下大气全位能的变分极小值问题. 这将是在充分了解到大气绝热情形下若干性质后的一项很有意义的工作.

4 结语

本文揭示了绝热情形下大气的若干重要性质，包括大气熵范围的不变性和表面位温的局地不变性，并重点考察了当等熵面与地面相交时等熵面上以及等熵面与地面之间的大气质量守恒性. 本文的论证表明：绝热情形下的大气运动遵循着特有的规律，在有效位能的研究中，客观定义的大气参考状态应当是实际大气经过绝热调整后可以达到的状态，是与调整前大气状态有关的，不同时刻的实际大气对应的参考状态应是不同的，并且要强调其客观的形成过程；而且，分析还指出 Lorenz 所定义的水平等熵面的理想参考状态是无法达到的，由此提出了条件最小全位能的新概念. 依据本文的结果，大气有效位能的确定应是实际大气的全位能与固定边界位温约束下大气全位能的变分极小值之差的问

题，这还有待于进一步工作加以研究.

参 考 文 献

1 Lorenz E N. Available potential energy and the maintenance of the general circulation. Tellus, 1955, 7(2): 157—167

2 Lorenz E N. The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere. Geneva: World Meteorological Organization Publication, 1967, 97—107

3 Margules M. Über die energie der stürme. Jahrb Zentralanst Meteor, 1903, 40: 1—26

4 Dutton J A, Johnson D R. The theory of available potential energy and a variational approach to atmospheric energetics. Advances in Geophys, 1967, 12: 333—436

5 Lorenz E N. Available energy and the maintenance of a moist circulation. Tellus, 1978, 30: 15—31

6 Taylor K E. Formulas for calculating available potential energy over uneven topography. Tellus, 1979, 31: 236—245

7 Smith P J. A computational study of the energetics of a limited region of the atmosphere. Tellus, 1969, 21(2): 193—201

8 Smith P J. On the contribution of a limited region to the global energy budget. Tellus, 1969, 21(2): 202—207

9 Johnson D R. The available potential energy of storms. J Atmos Sci, 1970, 27: 727—741

10 Edmon H J Jr. A reexamination of limited-area available potential energy budget equations. J Atmos Sci, 1978, 35: 1655—1659

11 Boer G J. Zonal and eddy forms of the available potential energy equations in pressure coordinates. Tellus, 1975, 27(5): 433—442

12 Siegmund P. The generation of available potential energy, according to Lorenz' exact and approximate equations. Tellus, 1994, 46A(5): 566—582

13 Shepherd G. A unified theory of available potential energy. Atmos Ocean, 1993, 31: 1—26

14 Oort A H, Ascher S C, Levitus S, et al. New estimates of the available potential energy in the world ocean. J Geophys Res, 1989, 94: 3187—3200

15 Huang R. Mixing and available potential energy in a Boussinesq Ocean. J Phys Oceanogr, 1998, 28: 669—678

16 Blanchard D O. Assessing the vertical distribution of convective available potential energy. Weather and Forecasting, 1998, 13: 870—887

17 Gettelman A, Seidel D J, Wheeler M C, et al. Multidecadal trends in tropical convective available potential energy. J Geophys Res, 2002, 107(D21): 4606—4613

18 DeMott C A, Randall D A. Observed variations of tropical convective available potential energy. J Geophys Res, 2004, 109: D02102

19 刘式适，刘式达. 大气动力学(上册). 北京：北京大学出版社，1991, 126—129, 151—153

20 Kasahara A. Various vertival coordinate systems used for numerical weather prediction. Mon Wea Rev, 1974, 102: 509—522