

误差非线性增长理论及可预报性研究

丁瑞强 李建平

中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体动力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

摘 要 对非线性系统的误差发展方程不作线性化近似, 直接用原始的误差发展方程来研究初始误差的发展, 提出了误差非线性增长理论。首先, 在相空间中定义一个非线性误差传播算子, 初始误差在这个算子的作用下, 可以非线性发展成任意时刻的误差; 然后, 在此基础上, 引入了非线性局部 Lyapunov 指数的概念。由平均非线性局部 Lyapunov 指数可以得到误差平均相对增长随时间的演变情况; 对于一个混沌系统, 误差平均相对增长被证明将趋于一个饱和值, 利用这个饱和值, 混沌系统的可预报期限可以被定量地确定。误差非线性增长理论可以应用于有限尺度大小初始扰动的可预报性研究, 较误差的线性增长理论有明显的优越性。

关键词 非线性 Lyapunov 指数 混沌 Logistic 映射 Lorenz 系统

文章编号 1006 - 9895 (2007) 04 - 0571 - 06 **中图分类号** P456 **文献标识码** A

Nonlinear Error Dynamics and Predictability Study

DING Rui-Qiang and LI Jian-Ping

State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

Abstract For a chaotic system, there exists a limit to how far ahead one can predict, which is unlikely to be determined by the existing global or local Lyapunov exponents. Primarily this is because the existing global or local Lyapunov exponents are established on the basis of the fact that the initial perturbations are sufficiently small such that their evolution can be governed approximately by the tangent linear model (TLM) of the nonlinear model, which essentially belongs to linear error dynamics. Linear error dynamics has been proved to have great limitations, which is only valid under given conditions and within a specified period of time, and is not applicable to the description of the process from initial exponential growth to finally reaching saturation for sufficiently small errors. Because of the limitations of linear error dynamics, the authors develop the nonlinear error dynamics, which measures the growth of initial errors of nonlinear dynamical models without linearizing the governing equations. Firstly, a nonlinear error propagator is defined in the phase space, which propagates the initial error forward in time along the system's fiducial trajectory. Then, the concept of nonlinear local Lyapunov exponent (NLL E) is introduced. The mean relative growth of initial error can be obtained by the mean NLL E. For a chaotic system, the authors prove that the mean relative growth of initial error derived from NLL E approaches a saturation value, which cannot be obtained from the linear error dynamics. Using the saturation level, the limit of dynamic predictability can be efficiently and quantitatively determined. The nonlinear error dynamics may be applied to the predictability study of the finite-size initial error, and demonstrates superiority in determining the limit of predictability of chaotic systems in comparison with linear one. The above results are examined by using the simple Logistic map and Lorenz system. But it is clear that the nonlinear error dynamics can be used to measure the growth rate of initial errors of a multi-discipline range of chaotic

收稿日期 2006 - 02 - 20, 2006 - 11 - 27 收修定稿

资助项目 国家自然科学基金资助项目 40325015、40675046

作者简介 丁瑞强, 男, 1977 年出生, 博士生, 主要从事大气可预报性研究。E-mail: drq@mail.iap.ac.cn

systems, and further quantify their predictability. Therefore it is reasonable to expect that the nonlinear error dynamics will be well applied to the complex systems, such as atmosphere and ocean systems. Recently, by applying the nonlinear error dynamics to the predictability analysis of atmospheric observation data, the authors obtain very encouraging results. A detailed discussion of these results will be given in the future.

Key words nonlinear, Lyapunov exponent, chaos, Logistic map, Lorenz system

1 引言

混沌系统对初始条件的敏感性意味着长期行为的不可预测性,但是系统的短期行为还是可以预测的。如何定量地估计混沌系统的可预报期限虽然比较困难,却有非常重要的现实意义^[1~3]。最大 Lyapunov 指数可以刻画混沌系统预报误差的整体(长期)平均增长速率,其倒数过去被近似表示为最大可预报时间长度^[4~6]。然而,实际情形证明这个统计量过分简单化^[7]。因为通常我们所关心的不是整体平均,有时即使是整体平均,也更加关心有限时间内的行为,就有必要研究吸引子的局部动力特征。后来一些人提出用局部或有限时间 Lyapunov 指数度量相空间的局部可预报性^[8~10],其定义是在有限时间内初始误差的平均增长率。相对于全局 Lyapunov 指数,局部 Lyapunov 指数可以更有效地度量可预报性,因为它可以展示吸引子的时空结构,这种结构可用来判定临近轨道的发散(收缩)率,从而确定可预报性高(低)的区域。但是,局部 Lyapunov 指数本质上与全局 Lyapunov 指数相同,都假设初始扰动无限小,以至其发展近似满足切线性方程,都属于误差的线性增长理论的范畴。已有的研究表明^[11,12],误差的线性增长理论存在着很大的缺陷和不足,这一点下面将作进一步讨论。

针对误差的线性增长理论的局限性,本文对非线性系统的误差发展方程不作线性化近似,直接用原始的误差发展方程来研究初始误差的发展,首次引进了非线性局部 Lyapunov 指数的概念,发展了误差非线性的增长理论。通过应用于 Logistic 映射和 Lorenz 系统,结果表明了误差非线性的增长理论较线性理论有明显的优越性,可以很好地表征有限尺度大小初始扰动的增长,能够定量地估计混沌系统的可预报期限,更适合于可预报性的研究。

2 误差的线性增长理论及其局限性

对于一个 m 维非线性动力系统

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)), \quad (1)$$

其中, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))^T$ 。设相空间中一条相轨迹的初始状态位于点 X_0 , 其邻近的另一个状态 $X_0 + (0)$, (0) 是一个小的偏差; 经过时间 t 后, X_0 发展为 $X(t)$, 而 $X_0 + (0)$ 发展为 $X(t) + (t)$; 那么, 误差 (t) 在相空间里随时间的演化满足:

$$\frac{d(t)}{dt} = J(X) + G(X, t), \quad (2)$$

其中, $J(X)$ 是切线性项, $J(X)$ 是 $m \times m$ 的 Jacobi 矩阵; $G(X, t)$ 是误差 (t) 的高阶非线性项。为了避免非线性的困难, 过去研究假设初始误差无限小, 认为误差 (t) 在相空间里随时间的演化近似受切线性方程控制^[4]:

$$\frac{d(t)}{dt} = J(X) \cdot (t). \quad (3)$$

这本质上是在相空间中定义一个线性误差传播算子 $\mu(X_0, t)$ ^[10], 误差增长函数 (t) 满足:

$$(t) = \mu(X_0, t) \cdot (0). \quad (4)$$

并由此来定义系统的最大 Lyapunov 指数:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\mu(X_0, t)}{(0)}, \quad (5)$$

这里 $\mu(X_0, t)$ 为局部或有限时间 Lyapunov 指数, 与相空间的初始位置 X_0 和时间 t 有关。由于遍历性原理, 最大 Lyapunov 指数 λ_1 并不依赖于 X_0 ^[13]。

为了说明误差的线性增长理论的局限性, 下面给出了 Logistic 映射的例子。Logistic 映射的方程为

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n), \quad 0 < a < 4. \quad (6)$$

这个系统是结构不稳定的, 随着参数 a 的变化出现不同的复杂现象; 当 $3.57 < a < 4$ 时, 系统表现出混沌行为^[2]。这里, 我们选取参数值 $a = 3.75$ 。图 1 给出了 Logistic 映射初始误差线性 [对 (2) 式作线性近似] 和非线性 [对 (2) 式不作任何近似] 情形随时间的平均增长。可以看出, 对于十分小的初始误差, 误差的线性和非线性增长在较短的时间里只有微小的差别; 但是随着时间的增长, 误差的非

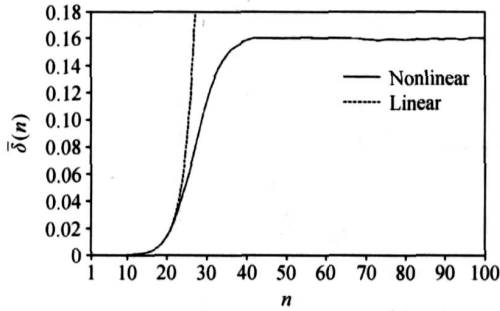


图1 Logistic 映射初始误差线性和非线性情形随时步 n 的平均增长

Fig.1 Linear and nonlinear average growth of errors in the Logistic map as a function of time step n

线性增长开始偏离误差的线性增长，最终达到饱和，而误差的线性增长一直保持持续的指数增长。以上结果表明，误差的线性增长理论仅在初始无穷小误差条件下和有限的时间内适用，并不能描述初始无穷小误差刚开始以指数增长最终达到饱和的整个演化过程，也不适合于描述有限尺度大小的初始误差的增长。为了克服传统误差的线性增长理论的局限性，有必要引进非线性局部 Lyapunov 指数，来研究误差的非线性增长过程。

3 误差非线性的增长理论

3.1 非线性局部 Lyapunov 指数

对误差演化方程 (2) 不作任何近似，保留所有的非线性项，误差演化方程的解可以从初始时刻 t_0 到 t 时刻进行数值积分获得：

$$\delta(t) = (X_0, (0), t) \delta(0), \quad (7)$$

其中， $(X_0, (0), t)$ 为非线性误差传播算子，与 (4) 式中的线性误差传播算子 $\mu(X_0, t)$ 相比，非线性误差传播算子 $(X_0, (0), t)$ 有本质不同，它还依赖于初始误差 $\delta(0)$ 。由 (7) 式可以定义非线性局部 Lyapunov 指数：

$$\lambda(X_0, (0), t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t)}{\delta(0)}, \quad (8)$$

这里， $(X_0, (0), t)$ 与相空间中参考轨道的初始状态 X_0 、初始误差大小 $\delta(0) = \delta(0)$ 以及演化时间 t 有关，不同于 (5) 式中定义的全局或局部 Lyapunov 指数。在 $\delta(0) = 0$ 和 $t \rightarrow \infty$ 的条件下，非线性局部 Lyapunov 指数将趋向全局最大 Lyapunov 指数 λ_1 。非线性局部 Lyapunov 指数可以表征初始误差在有限时间内的平均非线性增长率，它随着 X_0 的变化而有所不同，很好地反映了吸引子的局

部动力特征，这里我们只考虑非线性局部 Lyapunov 指数在吸引子上的平均。作为一个近似，可以取大量吸引子上不同初始状态 X_0 的平均代替总体平均。为了确保初始点位于吸引子上，我们选取了通过对非线性系统长期积分获得的同一条轨道上的不同点作为初始点。平均非线性局部 Lyapunov 指数可表示为：

$$\bar{\lambda}(X_0, (0), t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda(X_{0i}, (0), t), \quad (9)$$

其中， $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N$ 表示 $N(N \rightarrow \infty)$ 个样本的集合平均；误差平均相对增长可以通过平均非线性局部 Lyapunov 指数获得：

$$\bar{E}(X_0, (0), t) = \exp(\bar{\lambda}(X_0, (0), t) t). \quad (10)$$

3.2 误差平均相对增长的饱和性质

首先给出一个定理，然后给出定理的证明，误差平均相对增长的饱和性质可以从这个定理推出。

定理：设 X_1, X_2, \dots, X_n 是独立随机变量序列，均服从如下的概率分布：

$$f(x) = \begin{cases} p(x), & x \in [a, a], \\ 0, & x < a \text{ 或 } x > a, \end{cases} \quad (11)$$

其中， ϵ 是一个任意小的正数， a 是一个正常数， $p(x)$ 为定义在 $[a, a]$ 区间上的连续函数。令

$$Z_n = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n},$$

那么，

$$Z_n \xrightarrow{P} c(n \rightarrow \infty), \quad (12)$$

其中， \xrightarrow{P} 表示依概率收敛于 c ， c 为依赖于 $p(x)$ 的一个常数。

证明：对 Z_n 两边取对数，得

$$\ln Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i.$$

因为 X_i 独立同分布，所以 $\ln X_i$ 也独立同分布。又

$$E(\ln X_i) = \int_a^a \ln x \cdot p(x) dx.$$

$\ln x \cdot p(x)$ 在 $[a, a]$ 区间上连续可积，则得到

$$E(\ln X_i) = \int_a^a \ln x \cdot p(x) dx = b,$$

其中， b 为依赖于 $p(x)$ 的一个常数；由辛钦大数定律得

$$\ln Z_n \xrightarrow{P} b.$$

即有 $Z_n \xrightarrow{P} e^b = c$ ，证毕。

推论：从 (7)、(8)、(9) 式可得

$$\bar{\lambda}(0, t) = \exp\left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(0)} \right\rangle$$

对于相同大小的初始误差 $\delta(0)$, 有

$$\bar{\lambda}(0, t) = \left[\prod_{i=1}^N \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(0)} \right]^{1/N} / \delta(0)$$

对于混沌系统, 随着 $t \rightarrow \infty$, $\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_N(t)$ 将服从类似于 (11) 式的独立同分布 (不为零, 大小受吸引域的限制)。因此, 利用上面的定理, 我们可以得到

$$\bar{\lambda}(0, t) \xrightarrow{P} c(N, \delta(0)),$$

这里, c 能被看作是 $\bar{\lambda}(0, t)$ 的理论饱和值, 利用这个饱和值, 可预报期限能被定量地确定。

4 误差非线性的增长理论应用实例

4.1 Logistic 映射

前面已经给出 Logistic 映射, 这里, 我们同样选取参数值 $a = 3.75$ 。图 2 给出了 $\delta(0) = 10^{-6}$ 时, Logistic 映射的 $\bar{\lambda}(0, n)$ 以及 $\bar{E}(0, n)$ 的自然对数随时步 n 的变化。从图 2 可以看出, 开始一段时间平均非线性局部 Lyapunov 指数为常数。随着

n 的增大, 逐渐减小并趋向于 0 (图 2a)。这说明当误差很小时, 误差的增长率为最大 Lyapunov 指数 λ_1 , 表明在这段时间内, 线性误差增长理论还是可以适用的。然而, 随着误差的增长非线性作用也越来越大, 线性方程不再适用, 误差增长率开始下降, 最后误差停止增长, 达到饱和 (图 2b), 此时, 系统的初始信息丢失, 预报失去意义。类似 Dalcher 和 Kalnay 的工作^[14], 将初始误差演化到误差饱和值的 98% 时所对应的时间定义为可预报期限, 可以得到在 $\delta(0) = 10^{-6}$ 时, Logistic 映射的可预报期限为 $n = 39$ 。此外, 误差的实际计算饱和值与理论饱和值完全一致 (图 2b)。

图 3 研究不同 $\delta(0)$ 条件下 $\bar{\lambda}(0, n)$ 以及 $\bar{E}(0, n)$ 的自然对数随 n 的变化。可以发现, $\bar{\lambda}(0, n)$ 初始保持常数的时间随 $\delta(0)$ 的减小而变长 (图 3a), 但经过足够长的时间后, 所有曲线都单调下降, 最终趋于 0; 相应的 $\bar{E}(0, n)$ 也有类似的变化, 随着 $\delta(0)$ 的减小达到饱和的时间也变长, 但不论 $\delta(0)$ 多小, 最终还是达到饱和。Logistic 映射的可预报性期限随着 $\delta(0)$ 对数的增大线性减少

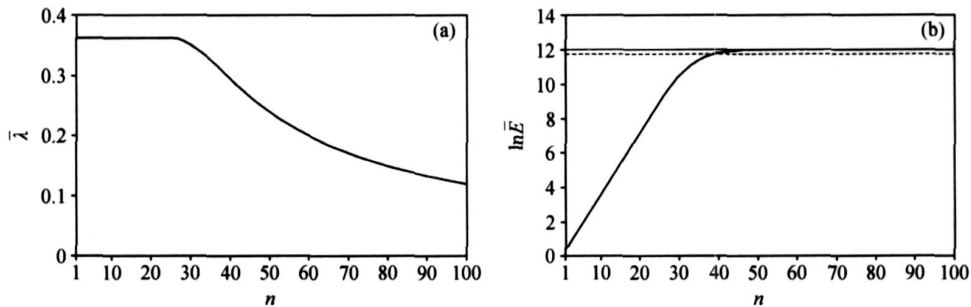


图 2 $\delta(0) = 10^{-6}$ 时平均非线性局部 Lyapunov 指数 $\bar{\lambda}(0, n)$ (a) 以及误差平均相对增长 $\bar{E}(0, n)$ 的自然对数 (b) 随时间的变化。水平实线: 误差的理论饱和值; 水平虚线: 误差饱和值的 98%

Fig. 2 The mean nonlinear local Lyapunov exponent (NLLLE) $\bar{\lambda}(0, n)$ (a) and the logarithm of the corresponding mean relative growth of initial error (RGIE) $\bar{E}(0, n)$ (b) at $\delta(0) = 10^{-6}$ as a function of time step n . The theoretical saturation level and 98% of that are indicated by the horizontal solid and dashed lines in (b), respectively.

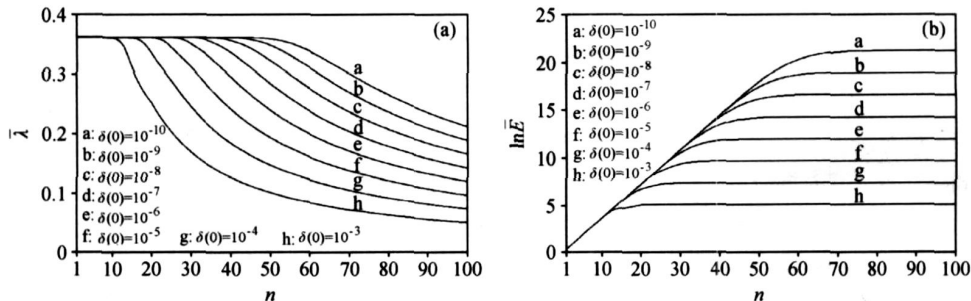


图 3 不同 $\delta(0)$ 条件下平均非线性局部 Lyapunov 指数 $\bar{\lambda}(0, n)$ (a) 以及误差平均相对增长 $\bar{E}(0, n)$ 的自然对数 (b) 随 n 的变化
 Fig. 3 The mean NLLLE $\bar{\lambda}(0, n)$ (a) and the logarithm of the corresponding mean RGIE $\bar{E}(0, n)$ (b) as a function of time step n for different $\delta(0)$

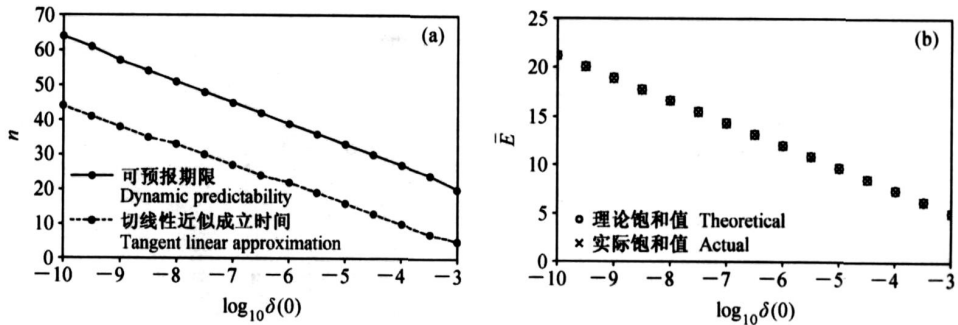


图4 Logistic系统的可预报期限与误差发展方程切线性近似成立的时间(a)以及误差的实际饱和值与理论饱和值(b)随 $\delta(0)$ 的变化
Fig.4 The limit of dynamic predictability and the time that the tangent linear approximation holds (a), and the actual saturation level and the theoretical saturation level of the error (b) as a function of $\delta(0)$ in the Logistic map

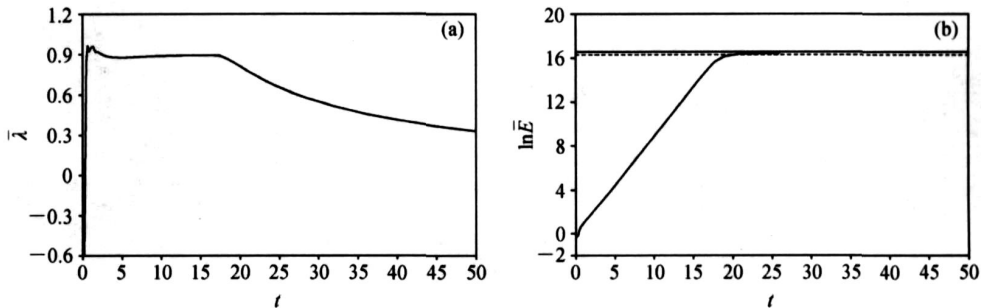


图5 同图2, 但为 Lorenz 系统
Fig.5 Same as Fig.2, but for Lorenz system

(图 4a), 但是对于某一个确定的 $\delta(0)$, Logistic 映射的可预报性期限要明显大于误差发展方程切线性近似成立的时间 [定义为图 3a 中 $\bar{\lambda}(\delta(0), n)$ 近似保持常数的时间 l]. 对于不同的 $\delta(0)$, 误差的实际计算饱和值与理论饱和值都有较好的吻合 (图 4b).

4.2 Lorenz 系统

Lorenz 系统的方程^[15]为

$$\begin{cases} \dot{X} = -X + Y, \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$. 与一维 Logistic 映射有所不同, 三维 Lorenz 系统的计算结果显得更为复杂一些. $\delta(0) = 10^{-6}$ 时, Lorenz 系统的 $\bar{\lambda}(\delta(0), t)$ 在最初的一小段时间内并没有保持一常数, 而是先为负值, 接着突然变为较大的正值; 随后逐渐趋于常数, 即最大 Lyapunov 指数 λ_1 ; 最后随着误差的增大, $\bar{\lambda}(\delta(0), t)$ 逐渐减小并趋向于零 (图 5a). 与之相对应, $\bar{E}(\delta(0), t)$ 经过最初的先减小接着超指数增长的阶段后, 才呈稳定的指数增长; 当发展到一定大小时, 误差的增长进入非线性阶段, 最终达到饱和 (图 5b). 按照前面的定义, 在 $\delta(0) = 10^{-6}$

时, Lorenz 系统的可预报期限为 $t = 19.7$. 注意到虽然取相同的初始误差大小, Logistic 映射的可预报性期限要比 Lorenz 系统的大, 这说明不同的混沌系统对初始值的敏感程度是不同的.

从图 6 可以看出, 不同 $\delta(0)$ 条件下, Lorenz 系统 $\bar{\lambda}(\delta(0), t)$ 及 $\bar{E}(\delta(0), t)$ 随 t 的变化, 与 Logistic 映射中的结论相同. 系统可预报性期限随 $\delta(0)$ 对数的增大也线性减少, 对于某一固定的 $\delta(0)$, 总要大于切线性近似成立的时间 (图 7a); 对于不同的 $\delta(0)$, 误差的实际计算饱和值与理论饱和值的一致性也在 Lorenz 系统得到验证 (图 7b).

5 总结和讨论

在非线性系统原始的误差发展方程基础上, 本文首次引进非线性局部 Lyapunov 指数的概念, 发展了误差非线性的增长理论, 通过比较误差线性和非线性增长理论的异同, 结果表明误差非线性的增长理论较线性理论有明显的优越性, 可以很好地表征有限尺度大小初始扰动的增长过程, 能够定量估计混沌系统的可预报期限, 更适合于可预报性的研究.

尽管 Logistic 映射和 Lorenz 系统形式上非常

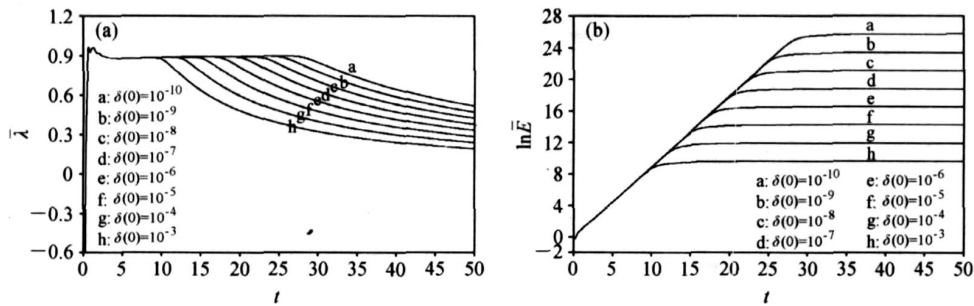


图6 同图3, 但为 Lorenz 系统

Fig. 6 Same as Fig. 3, but for Lorenz system

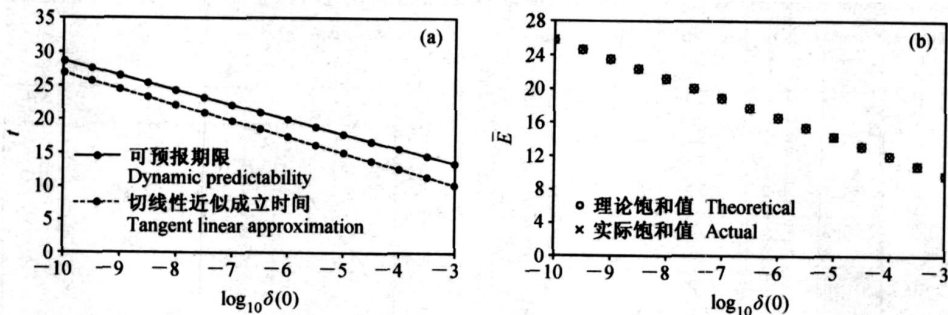


图7 同图4, 但为 Lorenz 系统

Fig. 7 Same as Fig. 4, but for Lorenz system

简单, 但有非常复杂的非线性特征, 能够充分揭示非线性作用对误差增长的影响。对于较复杂的非线性系统, 如天气和气候系统, 我们利用误差非线性的增长理论研究可预报性问题已取得了初步进展, 结合实际资料, 定量估计了 500 hPa 高度场可预报期限的空间分布特征^[16]。在以后的工作中, 大气中不同时空尺度运动的可预报期限及其关系、可预报性期限随初始误差的变化规律、可预报性期限的年代际变化、极端事件的可预报性问题、可预报性的预报问题, 以及从误差非线性增长的角度揭示影响可预报性的有关机制等, 是需要利用误差非线性的增长理论进一步研究的几个问题。

参考文献 (References)

- [1] May R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 1976, **261**: 459 ~ 467
- [2] Palmer T N. A nonlinear dynamical perspective on climate prediction. *J. Climate*, 1999, **12**: 575 ~ 591
- [3] 段晚锁, 穆穆. 用非线性最优化方法研究 El Niño 可预报性的进展与前瞻. *大气科学*, 2006, **30** (5): 759 ~ 766
Duan Wansuo, Mu Mu. Advance and prospect of the studies of El Niño predictability by nonlinear optimization method. *Chinese J. Atmos. Sci* (in Chinese), 2006, **30** (5): 759 ~ 766
- [4] Eckmann J P, Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 1985, **57**: 617 ~ 656

- [5] Fraedrich K. Estimating weather and climate predictability on attractors. *J. Atmos. Sci.*, 1987, **44**: 722 ~ 728
- [6] Fraedrich K. El Niño/ Southern Oscillation predictability. *Mon. Wea. Rev.*, 1988, **116**: 1001 ~ 1012
- [7] Lorenz E N. Predictability: A problem partly solved. Proceedings of a Seminar Held at ECMWF on Predictability (I), 1995. 1 ~ 18
- [8] Nese J M. Quantifying local predictability in phase space. *Physica D*, 1989, **35**: 237 ~ 250
- [9] Kazantsev E. Local Lyapunov exponents of the quasi-geostrophic ocean dynamics. *Appl. Math. Comp.*, 1999, **104**: 217 ~ 257
- [10] Ziemann C, Smith L A, Kurths J. Localized Lyapunov exponents and the prediction of predictability. *Phys. Lett. A*, 2000, **4**: 237 ~ 251
- [11] Lacarra J F, Talagrand O. Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, 1988, **40A**: 81 ~ 95
- [12] Mu M. Nonlinear singular vectors and nonlinear singular values. *Science in China* (D), 2000, **43**: 375 ~ 385
- [13] Oseledec V I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1968, **19**: 197 ~ 231
- [14] Dalcher A, Kalnay E. Error growth and predictability in operational ECMWF forecasts. *Tellus A*, 1987, **39**: 474 ~ 491
- [15] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, **20**: 130 ~ 141
- [16] Chen B H, Li J P, Ding R Q. Nonlinear local Lyapunov exponent and atmospheric predictability research. *Science in China* (D), 2006, **49**: 1111 ~ 1120