

史珍, 丁瑞强, 李建平. 2012. 随机误差对混沌系统可预报性的影响 [J]. 大气科学, 36 (3): 458 - 470, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2011.11072. Shi Zhen, Ding Ruiqiang, Li Jianping. 2012. Impacts of random error on the predictability of chaotic systems [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 36 (3): 458 - 470.

## 随机误差对混沌系统可预报性的影响

史珍<sup>1, 2</sup> 丁瑞强<sup>1</sup> 李建平<sup>1</sup>

1 中国科学院大气物理研究所大气科学和流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

2 中国科学院研究生院, 北京 100049

**摘要** 根据非线性局部 Lyapunov 指数的方法, 以 Logistic 映射和 Lorenz 系统的试验数据序列为例, 研究了在初始误差存在的情况下, 随机误差对混沌系统可预报性的影响。结果表明: 初始误差和随机误差对可预报期限影响所起的作用大小主要取决于两者的相对大小。当初始误差远大于随机误差时, 系统的可预报期限主要由初始误差决定, 可以不考虑随机误差对预报模式可预报性的影响; 反之, 当随机误差远大于初始误差时, 系统的可预报期限主要由随机误差决定; 当初始误差和随机误差量级相当时, 两者都对系统的可预报期限起重要作用。在后两种情况下, 在考虑初始误差对可预报性影响的同时还必须考虑随机误差的作用。此外, 我们在已知系统精确的控制方程和误差演化方程的条件下, 研究了随机误差对可预报性的影响, 理论所得结果与试验数据所得结果相似。这表明在随机误差较小的情况下, 对系统可预报期限的估计相对准确, 但在随机误差较大的情况下, 可预报期限的估计误差也较大。本文利用三种不同的滤波方法对序列进行了试验, 结果表明, Lanczos 高通滤波得到的高频序列与原始加入的噪声序列无论是在强度上还是在演变趋势上都表现得相当一致, 其能有效地去除高频噪声继而提高对系统的可预报期限的估计, 这对实际气象观测资料如何有效地去除噪声具有一定的启发意义。

**关键词** 非线性局部 Lyapunov 指数 初始误差 随机误差 可预报性

**文章编号** 1006-9895 (2012) 03-0458-13

**中图分类号** P456

**文献标识码** A

**doi:** 10.3878/j.issn.1006-9895.2011.11072

## Impacts of Random Error on the Predictability of Chaotic Systems

SHI Zhen<sup>1, 2</sup>, DING Ruiqiang<sup>1</sup>, and LI Jianping<sup>1</sup>

1 State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

2 Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

**Abstract** Based on the nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE) approach, the influences of random error and initial error on the predictability of the Logistic map and the Lorenz system are studied. The influences of initial error and random error on the predictability mainly depend on their relative magnitudes. When the magnitude of initial error is much greater than that of random error, the predictability limit of two systems is mainly determined by the initial error. On the contrary, when the magnitude of random error is much greater than that of initial error, the predictability limit of two systems is mainly determined by the random error. When the magnitude of initial error is

**收稿日期** 2011-04-12, 2011-08-02 收修定稿

**资助项目** 国家重点基础研究发展计划项目 2010CB950400, 国家自然科学基金资助项目 41030961, 40821092

**作者简介** 史珍, 女, 1984 年出生, 博士研究生, 主要从事可预报性的研究。E-mail: shizhen@lasg.iap.ac.cn

**通讯作者** 李建平, E-mail: lj@lasg.iap.ac.cn

close to that of random error, both of them contribute to the predictability limit of two systems. In addition, the authors have investigated the influences of random error on the predictability by integrating the error growth equations. The results are similar to those obtained using experimental data. This finding indicates that due to the impacts of random error, only an approximation of the true predictability of chaotic systems can be obtained when the random error is sufficiently small. It is impossible to obtain the true predictability for large random errors. The present study also attempts to use the filtering method to reduce the impact of random error on the estimates of the predictability limit of chaotic systems. The results show that by using the high-pass Lanczos filter, both the high-frequency sequence and the noise sequence perform conformably either in intensity or in the evolution of trends. This method can effectively remove the random noise and then improve the estimate of the predictability limit of chaotic systems, which also gives some enlightenment to the removal of the noise contained in observational data.

**Key words** nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE), initial error, random error, predictability

## 1 引言

自 Thompson (1957) 和 Lorenz (1963) 开创确定性系统的可预报性研究以来, 对混沌系统的可预报性问题已经做了很多的研究。混沌系统由于其固有的内在随机性, 存在一个可预报上限 (Lorenz, 1963, 1995; 丑纪范, 1990; 罗哲贤, 1994; 穆穆等, 2002; 李建平和丑纪范, 2003), 如何定量地给出可预报期限, 是可预报性研究的一个重要课题 (May, 1976; Palmer, 1999; 段晚锁和穆穆, 2006)。过去的许多研究是基于最大 Lyapunov 指数来刻画混沌系统预报误差的整体 (长期) 平均增长速率, 其倒数被近似表示为最大可预报时间长度 (Eckmann and Ruelle, 1985; Fraedicrich, 1987, 1988)。然而, 由于该指数假设初始扰动无限小, 误差发展方程近似满足切线性方程, 属于误差的线性增长理论的范畴, 忽略了误差非线性增长阶段对可预报性的贡献, 并不能描述有限尺度大小初始误差的情形, 因此存在着很大的缺陷和不足 (Lacarra and Talagrand, 1988; Mu, 2000; Ding and Li, 2007; Duan et al., 2007)。近年来, 李建平等 (2006)、Ding and Li (2007)、李建平和丁瑞强 (2008) 引入了非线性局部 Lyapunov 指数 (Nonlinear Local Lyapunov Exponent, 简称 NLLE) 的方法, 克服了传统 Lyapunov 指数的局限性, 可以很好地表征有限尺度大小初始扰动的非线性增长, 能够定量地确定混沌系统的可预报期限。在混沌系统的控制方程已准确获知的情况下, 可以直接数值积分混沌系统的控制方程及其误差发展方程, 来计算 NLLE 及其相关统计量, 从而定量地确定可预报期限。在混沌系统的控制方程未知的情况下, 可以对混沌系统某个

变量的试验或者观测数据通过寻找局部动力相似点的方法来确定 NLLE, 从而定量地估计可预报期限 (Ding et al., 2008; 李建平和丁瑞强, 2008, 2009; 丁瑞强和李建平, 2009; Li and Ding, 2011)。

在以往的可预报性研究工作中, 随机误差通常被用来产生初始扰动场或作为随机外强迫项, 如集合预报中的蒙特卡洛方法, 通过不同方式的随机扰动, 将随机值加到格点场、谱系数或经验正交函数中 (陈静等, 2002)。郑飞等 (2009) 采用“将随机误差直接加入模式方程右端”的方法, 利用一阶马尔科夫随机模式模拟模式误差来研究 ENSO 的可预报性问题。何文平等 (2006) 通过对 Lorenz 方程  $x$  方向添加高斯白噪声项来研究了 Lorenz 系统在某些区域的局地可预报性的问题。这些研究对认识随机误差在可预报性研究中的作用是很有意义的。然而, 过去的研究主要针对的都是数值模式已知控制方程的情况, 随机误差不论是作为初始扰动场还是随机外强迫项, 通过数值运算和不断的迭代, 它都参与了系统的动力过程。而在实际情况下, 由于气象资料的获取经历了观测、传输、计算、存储等一系列过程, 每一个过程都会造成差错, 所以气象资料的误差总是不可避免。气象资料的误差可以分为随机误差、系统误差和重大误差, 其中随机误差是气象观测的抽样误差, 无法克服, 而后两种误差通过严格的质量控制可以消除 (熊安元和王颖, 2007)。我们获得的大气的某个物理量很长时间的观测数据序列, 就不可避免的有随机误差的存在。在利用实际观测序列进行可预报性问题的研究过程中, 随机误差会对系统可预报性起到怎样的影响, 尚需深入研究。本文利用 NLLE 方法, 通过简单理想混沌模型 Logistic 映射和 Lorenz 系统来研究在

一定大小的初始误差存在的条件下, 随机误差对估计系统可预报性的影响, 所得结果将对认识随机误差对大气可预报性的影响有一定启示意义。

## 2 非线性局部 Lyapunov 指数 (NLLE) 方法

对于一个  $n$  维非线性动力系统, 其控制方程可用如下表示:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(x), \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  是  $t$  时刻系统的状态向量,  $T$  代表转置,  $\mathbf{F}$  表示动力过程。在状态  $\mathbf{x}$  上叠加一个小误差  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_n(t)]^T$ , 则误差发展的非线性方程可以表示为:

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} = \mathbf{J}(x)\boldsymbol{\delta} + \mathbf{G}(x, \boldsymbol{\delta}), \quad (2)$$

其中  $\mathbf{J}(x)\boldsymbol{\delta}$  是切线性项,  $\mathbf{G}(x, \boldsymbol{\delta})$  是关于误差  $\boldsymbol{\delta}$  的高阶非线性项。为了避开非线性的困难, 过去研究假设初始误差无限小, 认为误差在相空间里随时间的演化近似受切线性方程的控制 (Lorenz, 1965; Eckmann and Ruelle, 1985; Yoden and Nomura, 1993; Kazantsev, 1999; Ziehmann et al., 2000):

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} = \mathbf{J}(x)\boldsymbol{\delta}. \quad (3)$$

然而, 线性误差增长表现为持续的指数增长, 并不能描述初始无穷小误差刚开始以指数增长最终达到饱和的整个的演化过程 (Ding and Li, 2007; Li and Wang, 2008)。为了确定可预报期限, 有必要定义能够反映误差非线性增长过程的局部 Lyapunov 指数。对误差演化方程 (2) 不作任何线性近似, 保留所有的非线性项, 误差演化方程的解可以从  $t=t_0$  到  $t_0+\tau$  进行数值积分, 得到:

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\eta}(x_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau)\boldsymbol{\delta}_0, \quad (4)$$

其中  $\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}(t_0 + \tau)$ ,  $x_0 = x(t_0)$ ,  $\boldsymbol{\delta}_0 = \boldsymbol{\delta}(t_0)$ ,  $\boldsymbol{\eta}(x_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau)$  为非线性误差传播算子。非线性局部 Lyapunov 指数可以被定义为:

$$\lambda(x_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|\boldsymbol{\delta}_1\|}{\|\boldsymbol{\delta}_0\|}, \quad (5)$$

这里  $\lambda(x_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau)$  不仅依赖于相空间中参考轨道的初始状态  $x_0$  和演化时间  $\tau$ , 还与初始误差  $\boldsymbol{\delta}_0$  有关, 这与前人定义的建立在线性误差增长理论基础上的局部或有限时间 Lyapunov 指数 (Yoden and No-

mura 1993; Kazantsev, 1999; Ziehmann et al. 2000) 完全不同。在  $\|\boldsymbol{\delta}_0\| \rightarrow 0$  和  $\tau \rightarrow \infty$  的双重限制条件下, 非线性局部 Lyapunov 指数将趋向全局最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  (Ding and Li, 2007)。系统全局吸引子上的整体集合平均的非线性局部 Lyapunov 指数可表示为

$$\bar{\lambda}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau) = \int_{\Omega} \lambda(x_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau) dx = \langle \lambda(x_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau) \rangle_N, \quad (N \rightarrow \infty), \quad (6)$$

这里  $\Omega$  代表系统全局吸引子的区域范围,  $\langle \cdot \rangle_N$  表示  $N(N \rightarrow \infty)$  个样本的集合平均。则可获得初始误差的平均相对增长,

$$\bar{E}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau) = \exp[\bar{\lambda}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau)\tau]. \quad (7)$$

根据 Ding and Li (2007) 证明的饱和定理, 可得

$$\bar{E}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau) \xrightarrow{P} c (N \rightarrow \infty), \quad (8)$$

其中,  $\xrightarrow{P}$  表示依概率收敛于  $c$ ,  $c$  为依赖于  $P$  的一个常数。 $c$  可以看作是  $\bar{E}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau)$  的理论饱和值, 一旦误差增长达到饱和, 就意味着系统的初始信息全部丢失, 预测失去意义。利用这个饱和值, 系统的可预报期限能被定量的确定 (李建平等, 2006; Ding and Li, 2007)。我们将初始误差演化到饱和值的 99% 时, 所对应的时间定义为系统的可预报期限。

对于已知精确控制方程的系统, 我们可以直接积分系统方程与其误差演化方程来计算 NLLE, 从而定量确定系统的可预报期限 (Ding and Li, 2007)。对于未知精确控制方程的系统, 只有试验数据的情况, 我们可以根据以上理论, 通过寻找参考点对应的局地动力相似点 (不但初始距离比较小, 而且在很短时间内的演化距离也比较小), 来考察两者的误差发展情况, 从而确定系统的可预报期限 (Ding et al., 2008; 丁瑞强和李建平, 2009)。

## 3 试验设计

我们选取两个简单的混沌系统来研究随机误差对其可预报性的影响: Logistic 映射与 Lorenz 系统。Logistic 映射的方程为

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n), \quad (9)$$

其中,  $0 \leq a \leq 4$ , 我们选取参数  $a = 4.0$ , 对于该参数值 Logistic 映射在  $(0, 1)$  区间表现出完全的混沌行为 (Guckenheimer and Holmes, 1983; Dev-

aney, 1989)。

Lorenz 系统的方程 (Lorenz, 1963)

$$\begin{cases} \dot{X} = -\mu X + \mu Y \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $\mu$  为 Prandtl 数,  $r$  为 Rayleigh 数,  $b$  表示所研究对流区域的外形比参数。这里我们选取参数值  $\mu=10, r=28, b=8/3$ , 对于该参数著名的 Lorenz 吸引子存在。

假设我们已经获得某个混沌系统第  $i$  个单变量的  $n$  长度的试验数据,  $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{in})$ 。在实际情形下, 混沌系统的初始误差不可避免, 因此研究存在一定大小的初始误差的条件下, 随机误差对混沌系统的可预报性影响更有实际意义。在利用 NLLS 方法时, 试验数据中局部动力相似点之间的距离基本上满足对数正态分布, 经对数变换后可符合正态分布, 正态分布中对应概率最大的误差值即确定为试验数据的初始误差 (Ding and Li, 2008, 2010; 丁瑞强和李建平, 2008)。在获得原始试验数据的基础上 (其初始误差也已确定), 对原序列添加均值为 0, 方差为  $\sigma$  的高斯白噪声  $\mathbf{w}_i(t) = (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}, \dots, w_{in})$ , 则添加白噪声之后的试验数据为  $\mathbf{X}_i(t) = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \dots, X_{in})$ 。为了清楚地阐述随机误差对系统可预报性的影响, 需要研究以下两个问题:

(1) 随机误差问题, 即在系统存在一定大小的初始误差的条件下, 讨论  $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{w}_i(t)$ , 利用 NLLS 理论, 通过寻找实际观测序列动力相似点的方法计算得到误差的演化曲线, 来研究随机误差问题的误差增长。通过对系统添加不同量级的随机误差, 可定量地给出系统在不同大小随机误差情况下的可预报期限及误差随时间增长曲线, 以此来探究随机误差对可预报性的影响。

(2) 去噪问题。把随机误差看成是一种噪音, 则其对原数据产生的“污染”, 是否会使系统的可预报性受到影响? 若有, 是否能够通过某种方法使其减小甚至完全去除, 同时该方法必须尽可能地保持数据的原始属性。

对以上二类问题, 我们应用上述的简单一维离散动力系统 Logistic 映射, 和能反映大气热对流运动的三维连续动力系统 Lorenz 方程来进行研究,

讨论在一定大小的初始误差存在的条件下, 随机误差对估计系统可预报性的影响。

## 4 结果分析

在试验设计一节中已讨论了本文要研究的两类问题, 下面分别列出对以上两类问题研究得到的结果。

### 4.1 Logistic 映射

对于给定参数  $a=4.0$  情况下, 取序列长度  $n=100000$ , 该长度已能满足计算要求且所耗时较短。通过数值迭代得到所需的试验观测数据, 试验数据中局部动力相似点之间的距离基本上满足对数正态分布, 经对数变换后可符合正态分布, 正态分布中对应概率最大的误差值即确定为试验数据的初始误差。图 1 给出了序列中各参考点与对应的局地动力相似点之间的初始距离经对数变换后的概率分布图, 从图中可以看出, 序列拥有最大概率分布的初始距离量级为  $10^{-5}$ , 根据前述的理论和已有的研究, 我们可以认为序列的初始扰动近似为  $\delta(0) = 10^{-5}$ , 也即该长度的 Logistic 映射序列的初始误差为  $\delta(0) = 10^{-5}$ 。

计算原序列的标准差  $\sigma$ , 对原序列加入标准差为  $\sigma'$  的白噪声。为了更清楚地说明问题, 我们加入的白噪声的大小依据是白噪声标准差  $\sigma'$  与原序列标准差  $\sigma$  的不同比值, 表 1 给出了加入的不同标准差的白噪声及其对应的占最大概率的量级, 概率分布满足正态分布, 这里没有给出具体的分布图。

从表 1 中可以看到, 随着白噪声标准差占原序

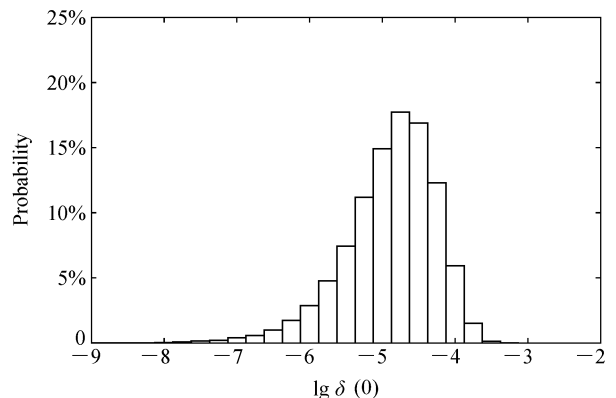


图 1 Logistic 映射初始距离量级的概率分布图  
Fig. 1 Probability distribution of the initial distances between the reference points and their local dynamical analogous points of the Logistic map

表 1 Logistic 映射加入的不同大小标准差的白噪声及其对应的主要量级

Table 1 Different standard deviations of random error added to the experimental time series of the Logistic map and the corresponding magnitudes

不同的白噪声标准差 ( $\sigma'$ )	量级
$\sigma' = 10^{-1}\sigma$	$10^{-2}$
$\sigma' = 10^{-2}\sigma$	$10^{-3}$
$\sigma' = 10^{-3}\sigma$	$10^{-4}$
$\sigma' = 10^{-4}\sigma$	$10^{-5}$
$\sigma' = 10^{-5}\sigma$	$10^{-6}$
$\sigma' = 10^{-6}\sigma$	$10^{-7}$

列标准差比率的减小,白噪声序列的主要量级也在逐渐减小。当白噪声标准差是原序列标准差的  $10^{-4}$  倍的时候,白噪声序列的主要量级与原始序列的初始误差的主要量级相当,同为  $10^{-5}$ 。

图 2 给出了在加入以上不同标准差的白噪声情况下,Logistic 映射的误差平均相对增长随时间的变化曲线,从图中可以看出,对于初始误差问题和随机误差问题,系统的误差平均相对增长曲线的形状都十分相似,都表现为起初增长,随着时间的发展,误差达到饱和值,停止增长。随着加入的白噪声标准差越来越大,序列的误差平均相对增长曲线越来越快地达到饱和,反之,当白噪声标准差越来越

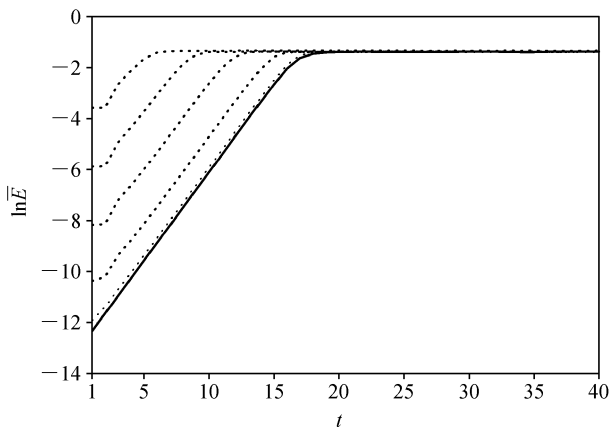


图 2 不同随机误差量级条件下 Logistic 映射的误差 ( $E$ ) 发展曲线。实线: 初始误差; 虚线: 随机误差 (从左到右 6 条虚线对应的随机误差量级分别为  $10^{-2}$ 、 $10^{-3}$ 、 $10^{-4}$ 、 $10^{-5}$ 、 $10^{-6}$ 、 $10^{-7}$ )

Fig. 2 Estimated error ( $E$ ) growth of the Logistic map with certain initial error (solid line) and random errors of different magnitudes (dashed line). From left to right dashed lines, the magnitudes of random errors are  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-6}$ , and  $10^{-7}$ , respectively

越小,序列的误差平均相对增长曲线越来越慢的达到饱和,且逐渐地靠近原始序列的误差增长曲线。当加入的白噪声标准差为原序列标准差的  $10^{-5}$  倍的时候,随机误差增长曲线已几乎与原序列相重合,此时白噪声标准差的主要量级为  $10^{-6}$ ,小于初始误差一个量级。随着白噪声量级的进一步减小,误差增长曲线与原始序列的完全重合。

而在系统精确的控制方程已知的情况下,我们是否能够得到同样的结论? 我们再对系统在给定初始误差为  $10^{-5}$  时,加入以上给出的不同量级的随机误差,直接积分误差演化方程,得到误差增长曲线如图 3。可以看到误差增长曲线随着加入随机误差的量级的增大而逐渐远离初始误差为  $10^{-5}$  的误差增长曲线。这表明即使我们已知系统精确的控制方程和误差演化方程,但是由于受到随机误差的影响,我们所能得到的系统的可预报性估计只能是在随机误差比较小的情况下,无限地接近系统真实的可预报性。而图 3 与图 2 非常相似的结果,也印证了无论是从理论方程中还是从试验数据中,随机误差对系统可预报性起的影响是相似的。

为了更加清晰地说明随机误差对系统可预报性的影响有多大,我们对以上得到的加入了不同随机误差后的误差增长曲线,与通过直接积分误差演化方程得到的理论上的误差增长曲线做拟合,来定量地确定随机误差对系统的可预报性影响。图 4 以对初始误差约为  $10^{-5}$  的原始序列加入量级为  $10^{-3}$  的随机误差为例,从图中拟合的结果可以看到,序列的误差增长曲线相当于直接积分初始误差为  $10^{-3.2}$

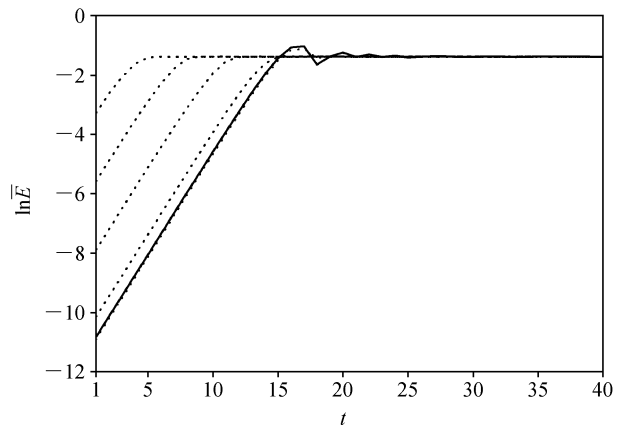


图 3 同图 2, 但为直接积分误差演化方程的结果

Fig. 3 Same as Fig. 2, but by integrating the error growth equations

的误差演化方程的误差增长曲线, 此时系统的可预报期限的估计明显小于直接积分初始误差为  $10^{-5}$  的结果。这说明随机误差的存在相当于提高了系统的初始误差值, 从而减小了系统的可预报性。

图 5 给出了 Logistic 映射的可预报期限随加入的不同量级随机误差的变化图, 我们发现, 当随机误差相对初始误差较小, 其标准差对原始序列标准差的比率在  $10^{-8} \sim 10^{-6}$  倍之间变化时, Logistic 映射的可预报期限基本不随随机误差大小的变化而变

化, 与仅有初始误差而无随机误差时系统的可预报期限基本相同; 当随机误差相对初始误差较大, 其标准差对原始序列标准差的比率在  $10^{-4} \sim 10^{-1}$  倍之间变化时, 系统的可预报期限基本上不依赖于初始误差; 当随机误差与初始误差量级相当同为  $10^{-5}$  时, 系统的可预报期限介于以上两种情况之间。大体而言, 以初始误差作为临界值, 当随机误差小于临界值时, 系统的可预报性的估计基本不受随机误差的影响, 当随机误差大于等于临界值时, 系统的可预报性的估计则随着随机误差的增大而逐渐减小。

#### 4.2 Lorenz 方程

同样, 我们对 Lorenz 方程采用四阶龙格库塔方法求解, 得到  $x, y, z$  三个单变量方向上的序列长度  $n = 100000$  的数值解, 作为所需的试验数据。对  $x$  单变量序列中各参考点与对应的局地动力相似点之间的初始距离做对数变换后得到概率分布图 (图略), 可发现序列拥有最大概率分布的初始距离量级为  $10^{-2}$ , 类似 Logistic 映射的分析, 我们认为 Lorenz 方程  $x$  单变量序列的初始误差为  $\delta(0) = 10^{-2}$ 。表 2 给出了在  $x$  方向单变量上加入的不同标准差的白噪声及其对应的占最大概率的量级。从表 2 中可以看到, 随着白噪声标准差占原序列标准差比率的减小, 白噪声序列的主要量级也在逐渐减小。当白噪声标准差是原序列标准差的  $10^{-2}$  的时候, 白噪声序列的主要量级与原始序列的初始误差的主要量级相当, 同为  $10^{-2}$ 。

图 6 给出了在加入以上不同标准差的白噪声情况下, Lorenz 方程  $x$  单变量的误差平均相对增长

表 2 Lorenz 方程  $x$  方向单变量上加入的不同大小标准差的白噪声及其对应的主要量级

Table 2 Different standard deviations of random errors added to the  $x$ -axis variable of the Lorenz system and the corresponding magnitudes

不同的白噪声标准差 ( $\sigma'$ )	量级
$\sigma' = 10^{-1}\sigma$	$10^{-1}$
$\sigma' = 10^{-2}\sigma$	$10^{-2}$
$\sigma' = 10^{-3}\sigma$	$10^{-3}$
$\sigma' = 10^{-4}\sigma$	$10^{-4}$
$\sigma' = 10^{-5}\sigma$	$10^{-5}$
$\sigma' = 10^{-6}\sigma$	$10^{-6}$

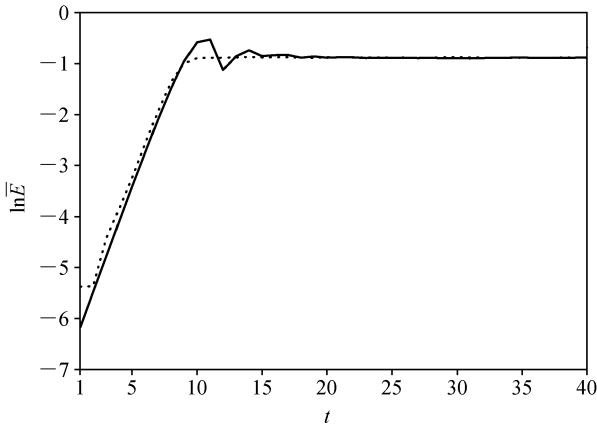


图 4 Logistic 映射的误差发展曲线。实线: 拟合的初始误差量级为  $10^{-3.2}$  的误差增长曲线, 虚线: 随机误差量级为  $10^{-3}$  误差增长曲线

Fig. 4 Estimated error growth of the Logistic map with certain initial error (the magnitude is  $10^{-3.2}$ ) (solid line) and random error (the magnitude is  $10^{-3}$ ) (dashed line)

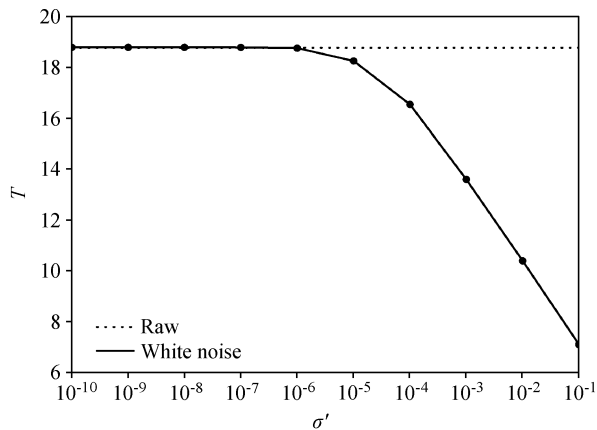


图 5 不同大小的随机误差条件下 Logistic 映射的可预报期限 ( $T$ )。虚线为初始误差的可预报期限, 实点线为不同大小随机误差的可预报期限

Fig. 5 Estimated predictability limit ( $T$ ) of the Logistic map with certain initial error (dashed line) and random errors of different magnitudes (solid line)

随时间的变化曲线。类似于简单离散动力系统 Logistic 映射, 不论是初始误差问题还是随机误差问题, Lorenz 方程  $x$  单变量的误差平均相对增长曲线的形状都十分相似, 都表现为起初增长, 随着时间的发展, 误差达到饱和值, 停止增长。同样地, 随着加入的白噪声标准差越来越大, 序列的误差平均相对增长曲线越来越快地达到饱和, 反之, 当白噪声标准差越来越小, 序列的误差平均相对增长曲线越来越慢地达到饱和, 且逐渐地靠近原始序列的误差增长曲线。当加入的白噪声标准差为原序列标准的  $10^{-3}$  倍的时候, 误差增长曲线已几乎与原序列相重合, 此时白噪声标准差的主要量级为  $10^{-3}$ , 小于初始误差一个量级。随着白噪声的进一步减小, 误差增长曲线与原始序列的完全重合。同时随着白噪声量级的增大, 误差增长曲线达到的饱和值略大于初始误差曲线的饱和值, 这一点与 Logistic 映射的随机误差曲线不同, 说明对于像 Lorenz 方程这样的三维自治动力系统, 随机误差对系统可预报性起到的影响要大于简单一维离散动力系统的, 这种影响随着随机误差的增大而加强。这也提醒我们, 在面对大气这一类自由度非常高的复杂动力系统时, 利用实际观测资料去研究大气的可预报性的过程中会不可避免地受到随机误差的影响。同样, 我们对 Lorenz 方程  $x$  单变量也做了与 Logistic 映射类似的拟合曲线以及积分误差演化方程 (图略),

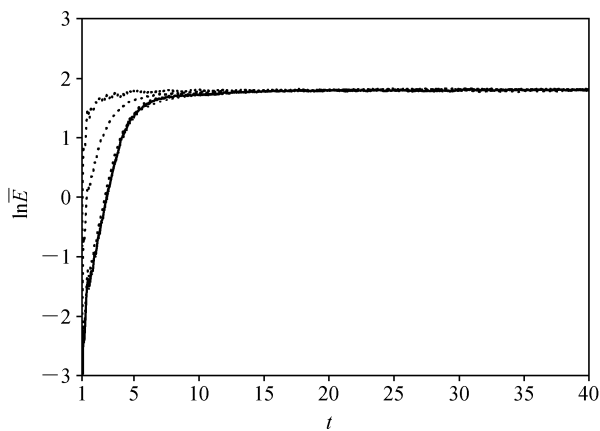


图 6 同图 2, 但为 Lorenz 方程  $x$  方向单变量的误差发展曲线 (从左到右 6 条虚线对应的随机误差量级分别为  $10^{-1}$ 、 $10^{-2}$ 、 $10^{-3}$ 、 $10^{-4}$ 、 $10^{-5}$ 、 $10^{-6}$ )

Fig. 6 Same as Fig. 2, but for the estimated error growth of the  $x$ -axis variable of the Lorenz system. From left to right dashed lines, the magnitudes of random errors are  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ , and  $10^{-6}$ , respectively

得到相似的结论, 这里就不予赘述了。

图 7 给出了 Lorenz 方程  $x$  单变量的可预报期限随加入的不同量级随机误差的变化图。我们发现, 当随机误差相对初始误差较小, 其标准差对原始序列标准差的比率在  $10^{-6} \sim 10^{-3}$  之间变化时,  $x$  单变量的可预报期限基本不随随机误差大小的变化而变化, 与仅有初始误差而无随机误差时的可预报期限基本相同; 当随机误差相对初始误差较大, 其标准差对原始序列标准差的比率为  $10^{-1} \sim 0.5$  时,  $x$  方向单变量的可预报期限基本上不依赖于初始误差; 当随机误差与初始误差量级相当同为  $10^{-2}$  时,  $x$  方向单变量的可预报期限介于以上两种情况之间。总体而言, Lorenz 方程  $x$  单变量可预报期限随着随机误差的增大而逐渐减小, 当随机误差不在临界点附近, 随机误差引起的系统微小变化不会导致系统性质的重大变化; 而当随机误差远超过临界点时, 将会对系统性质发生重大改变, 从而降低了系统的可预报性。

那么, 对于 Lorenz 方程, 其全局上的可预报性受随机误差的影响如何? 首先我们也对全局上的初始距离做对数变换后得到概率分布图 (图略), 可认为全局上拥有最大概率分布的初始距离量级为  $10^{-1}$ , 即初始误差为  $\delta(0) = 10^{-1}$ 。

对  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个单变量各个方向上均加入如表 3 所列的白噪声, 计算得到误差增长曲线 (图略)。全局上系统的误差增长与单变量上的情况相似, 随着加入的白噪声标准差越来越大, 序列的误差平均相对增长曲线越来越快地达到饱和, 反之, 当白噪声标准差越来越小, 序列的误差平均相对增长曲线

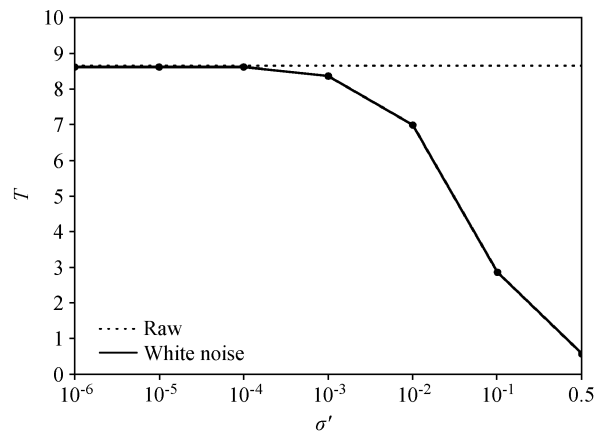


图 7 同图 5, 但为 Lorenz 方程  $x$  方向单变量

Fig. 7 Same as Fig. 5, but for the  $x$ -axis variable of the Lorenz system

越来越慢地达到饱和，且逐渐地靠近原始序列的误差增长曲线。当加入的白噪声标准差为原序列标准差的  $10^{-2}$  倍的时候，系统的误差增长曲线已十分接近原序列的，此时白噪声标准差的主要量级为  $10^{-2}$ ，小于初始误差一个量级。随着白噪声的进一步减小，误差增长曲线与原始序列的完全重合。同样地，随着白噪声量级的增大，误差曲线达到的饱和值略大于初始误差曲线的饱和值。

表 3 Lorenz 方程各单变量方向上同时加入的不同大小标准差的白噪声及对应的主要量级  
Table 3 Different standard deviations of random errors added to the Lorenz system and the corresponding magnitudes

不同的白噪声标准差 ( $\sigma'$ )	量级
$\sigma' = 0.5\sigma$	$10^0$
$\sigma' = 10^{-1}\sigma$	$10^{-1}$
$\sigma' = 10^{-2}\sigma$	$10^{-2}$
$\sigma' = 10^{-3}\sigma$	$10^{-3}$

图 8 给出了 Lorenz 方程全局的可预报期限随加入的不同量级随机误差的变化图。我们发现，当随机误差相对初始误差较小，其标准差对单变量序列标准差的比率在  $10^{-6} \sim 10^{-2}$  之间变化时，系统全局的可预报期限基本不随随机误差大小的变化而变化，与仅有初始误差而无随机误差时的可预报期限基本相同；当随机误差相对初始误差较大，其标准差对单变量序列标准差的比率在 0.5，量级为  $10^0$  时，系统的可预报期限基本上不依赖于初始误差；当随机误差与初始误差量级相当同为  $10^{-1}$  时，系统的可预报期限介于以上两种情况之间。总体而言，与 Lorenz 方程  $x$  单变量相类似，系统全局的可预

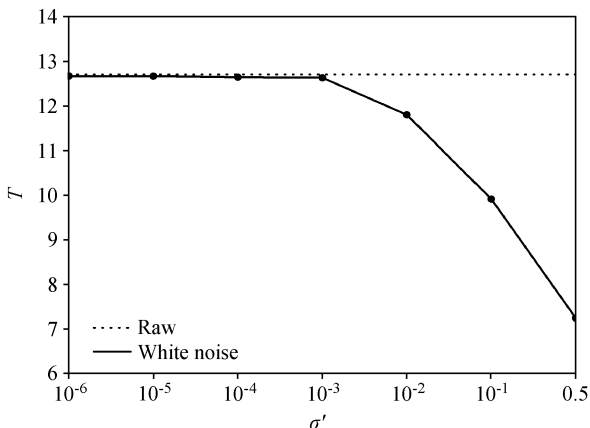


图 8 与图 5 同，但为 Lorenz 方程全局  
Fig. 8 Same as Fig. 5, but for the Lorenz system

报期限随着随机误差的增大而逐渐减小，当随机误差不在临界点附近，随机误差引起的系统微小变化不会导致系统性质的重大变化；而当随机误差远超过临界点时，将会对系统性质发生重大改变，从而降低了系统的可预报性。

#### 4.3 试验序列中噪声的去除

从以上的分析可知，在随机误差大于初始误差量级的时候，随机误差对系统的可预报性估计有重要影响，那么，是否能够对序列进行除噪以减小甚至去除其对系统可预报性的影响？对于试验资料的情况，我们采用不同的滤波方法对加入白噪声的序列进行滤波，再计算其可预报期限，这里我们以 Lorenz 方程  $x$  单变量为例。

首先，我们采用多点滑动加权平均滤波。为了尽可能地避免改变数据结构，同时又具备滤除噪音的条件，我们选择三点一次平滑作为低通滤波器，对加入白噪声的序列进行滤波，再计算其可预报期限。图 9a、图 9b 和 9c 给出了原始序列、加噪音序列和滤波后序列的图，从图中可以看出，三点平滑虽然能够减轻高频噪声造成的序列的剧烈波动，但序列还是存在着小振幅的剧烈波动。从平滑后序列的误差平均相对增长随时间的变化曲线（图 10）可以看到，对于图 10a 与图 10b 系统受白噪声影响较大的情况，即白噪声标准差较大时，平滑后序列的误差增长曲线与未平滑序列的几乎完全重合，远早于初始误差增长曲线达到饱和，对系统可预报性的改善作用非常微小。

对于一个包含有不同频率变化成分的序列，若想获得序列的低频变化部分，传统的 Lanczos 滤波方法是将待分析的时间序列做低通滤波，滤去高频部分，保留低频部分，以此来对原序列进行去噪处理。图 9d 给出了经 Lanczos 低通滤波后序列的图，从图中可以看出，Lanczos 低通滤波虽然去除了高频变化的白噪声，但也使得原始序列的一部分高频变化受到抑制，从而导致系统的结构发生了很大的变化，因此这样的滤波方法也是不适用的。

由于低通滤波会导致除高频噪声外的序列本身的高频部分被抑制，鉴于噪声变率较快，相对于真实的信号而言属于一个快变过程，我们考虑使用 Lanczos 高通滤波，将序列的高频部分滤出来，再将叠加白噪声的序列减去滤出的高频部分，这样就得到了去噪后的序列。图 11 给出了对原始序列叠



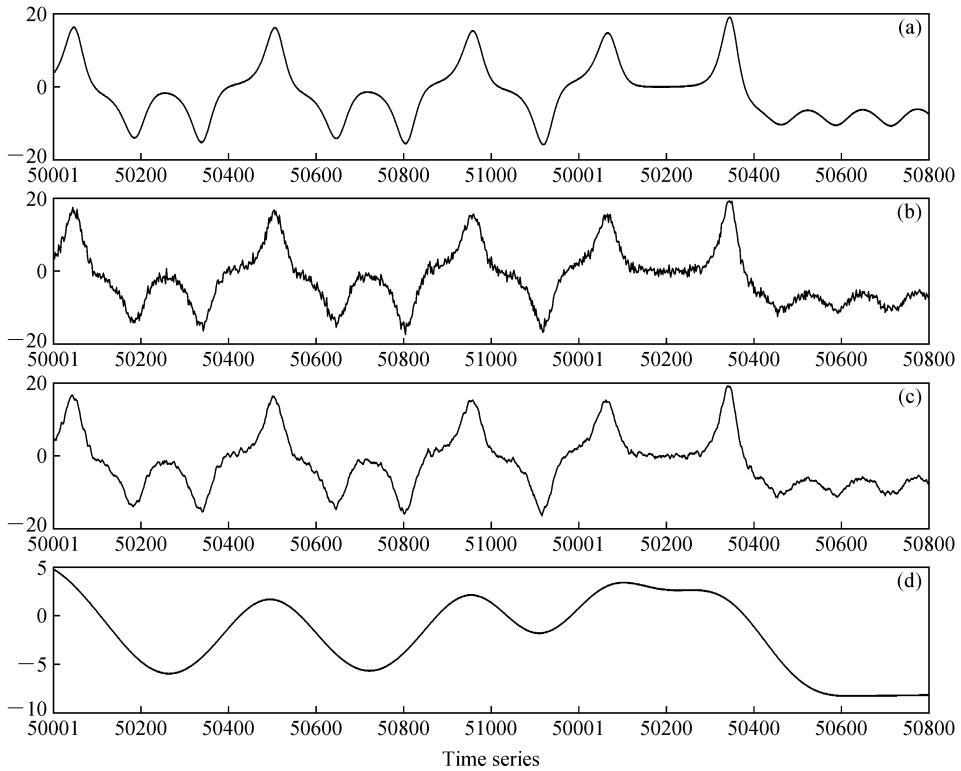


图9 Lorenz 方程  $x$  方向变量在不同情况下的时间序列图: (a) 原始序列; (b) 叠加随机误差量级为  $10^{-1}$  后的序列; (c) 平滑后序列; (d) Lanczos 低通滤波结果

Fig. 9 Time series of the  $x$ -axis variable of the Lorenz system under different conditions: (a) raw series; (b) series containing random error (the magnitude is  $10^{-1}$ ); (c) series after smoothing; (d) series after Lanczos filter

加的噪音序列和经 Lanczos 高通滤波后得到的高频噪声的图。可以看到滤波后得到的高频序列无论是在噪声的强度上,还是在噪声随时间的演变趋势上均表现得与真实噪声非常一致。从滤波后序列的误差平均相对增长随时间的变化曲线(图 12)可以看到,对于白噪声标准差较大的情况,滤波后序列的误差增长曲线比未滤波序列的更靠近初始误差增长曲线,这表明滤波有效地改善了高频噪声对系统可预报性的影响。从可预报期限的图中可以看到(图 13),当随机误差大于初始误差时,滤波后系统的可预报期限得到了大幅的提升,且相对于三点一次平滑效果更为显著。因此相对于传统的滤波思路,这种滤波方法能有效地去除混沌系统上叠加的随机误差,进而提高了系统的可预报性。

## 5 总结和讨论

本文利用非线性局部 Lyapunov 指数 (NLLE) 的方法来比较研究了 Logistic 映射与 Lorenz 方程两种简单混沌系统在存在一定初始误差情况下的随

机误差的可预报性问题,主要结论如下:

(1) 在系统存在一定大小初始误差的条件下,对于初始误差问题和随机误差问题,系统的误差平均相对增长曲线的形状都十分相似,都表现为起初增长,随着时间的发展,误差达到饱和值,停止增长。同时随机误差的可预报期限随着误差的增大而减小。

(2) 在存在一定大小初始误差时,随机误差对系统可预报性的影响主要取决于初始误差和随机误差的相对大小。当初始误差远大于随机误差时,系统的可预报期限主要由初始误差决定;反之,当随机误差远大于初始误差时,系统的可预报期限主要由随机误差决定;当两者大小相当时,两者都对系统的可预报期限起重要的作用。

(3) 无论是从理论方程中还是从试验数据中,随机误差对系统可预报性起的影响是相似的,我们得到的系统的可预报性,只能是在随机误差比较小的情况下无限接近于系统的真实可预报性,而无法准确度量出在随机误差较大情况下系统的可预报

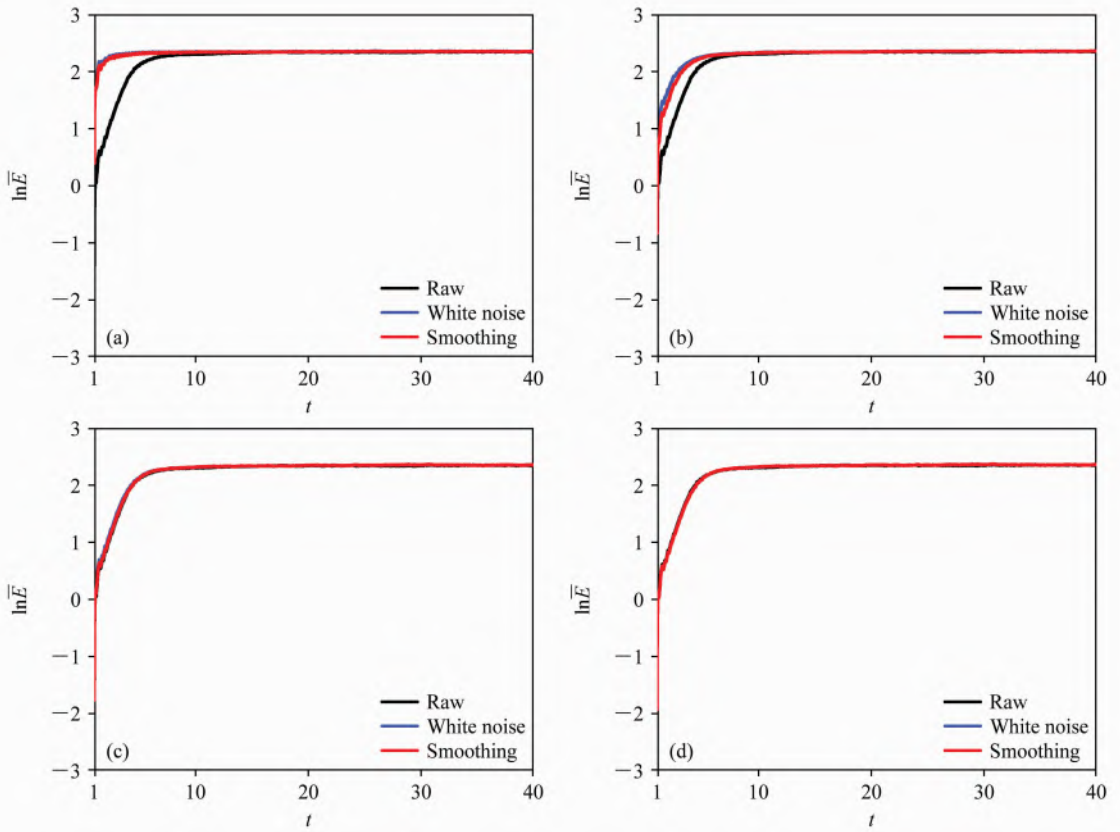


图 10 不同大小的随机误差条件和平滑后条件下 Lorenz 方程  $x$  单变量的误差发展曲线：随机误差量级为 (a)  $10^{-1}$ ；(b)  $10^{-2}$ ；(c)  $10^{-3}$ ；(d)  $10^{-4}$ 。黑线：初始误差；蓝线：随机误差；红线：平滑后误差

Fig. 10 Estimated error growth of the  $x$ -axis variable of the Lorenz system with certain initial error (black line), random errors of different magnitudes (blue line), and filtered time series (red line). From (a) to (d), the magnitudes of random errors are  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ , and  $10^{-4}$ , respectively

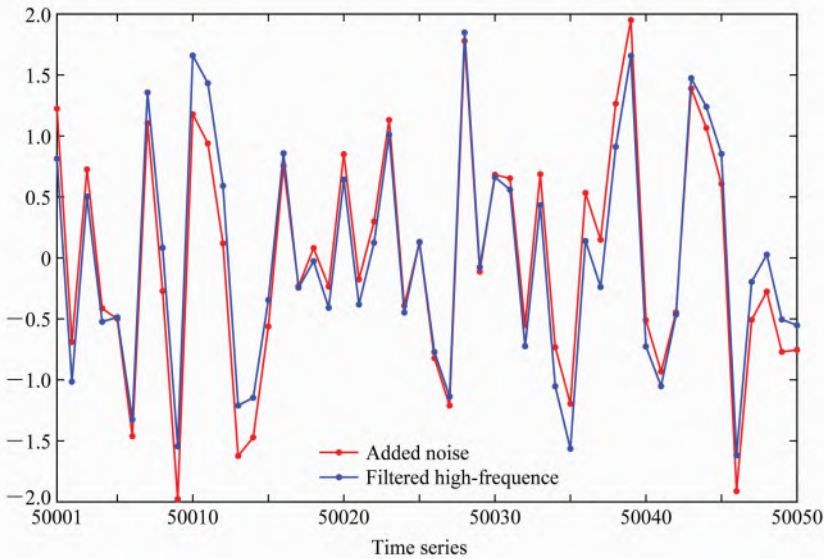


图 11 Lorenz 方程  $x$  方向叠加的量级为  $10^{-1}$  的随机误差的时间序列 (红点线) 和滤波后得到的高频部分 (蓝点线)

Fig. 11 Time series of the noise added on the  $x$ -axis variable of the Lorenz system (red dotted line) and the high-frequency sequence obtained after filtering (blue dotted line)

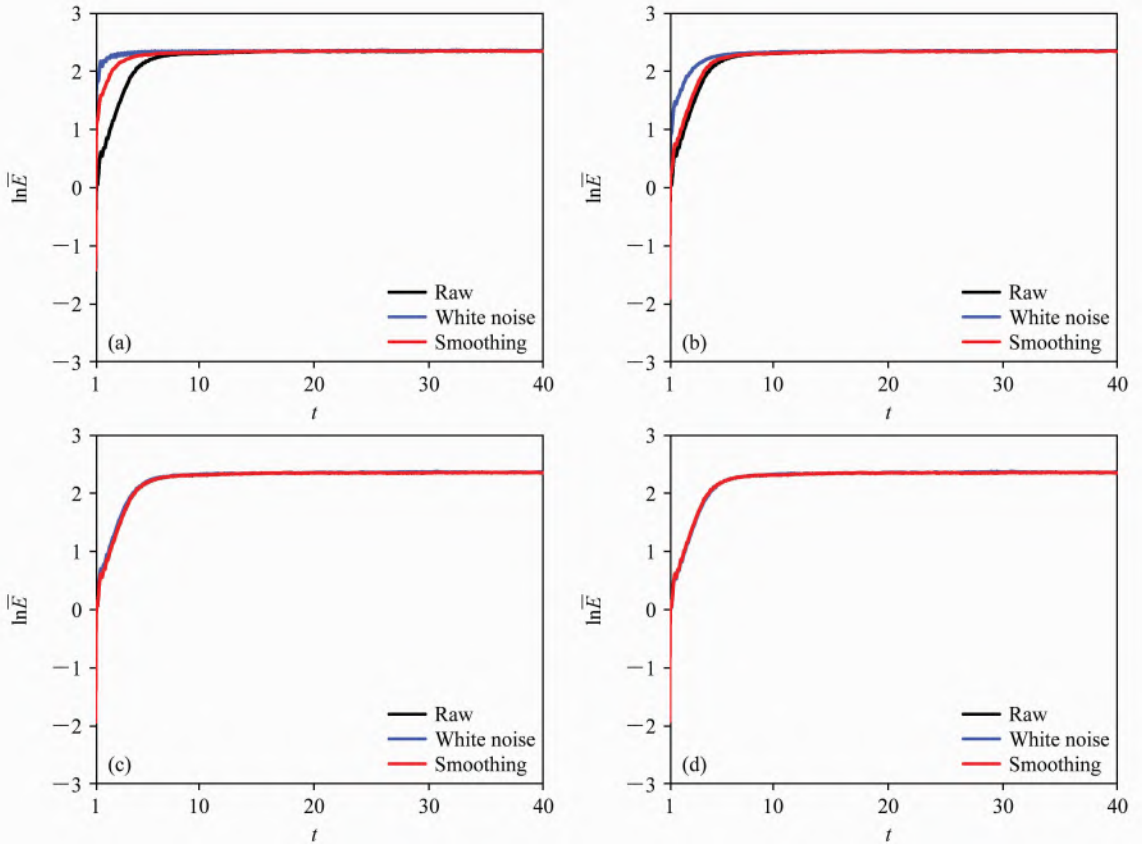
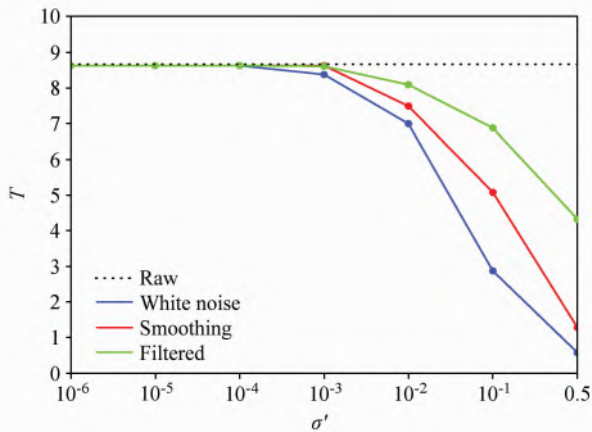


图 12 同图 10, 但为 Lanczos 高通滤波处理后结果

Fig. 12 Same as Fig. 10, but for the results after the high-pass Lanczos filter

图 13 不同大小的随机误差条件下以及不同平滑条件下 Lorenz 方程  $x$  方向单变量的可预报期限。虚线: 初始误差, 蓝线: 不同大小随机误差, 红线: 平滑后, 绿线: Lanczos 高通滤波处理后Fig. 13 Estimated predictability limit of the  $x$ -axis variable of the Lorenz system with certain initial error (dashed line), random errors of different magnitudes (blue line), running mean time series (red line), and filtered time series by high-pass Lanczos filter (green line)

性。

(4) 为了减小随机误差对系统可预报期限估计的影响, 本文采用了三种不同的滤波方法, 对于三点一次平滑和传统的 Lanczos 低通滤波, 在系统可预报性受到随机误差影响较大的情况下, 即随机误差远大于初始误差时, 滤波均不能减小甚至去除随机误差进而降低其对系统可预报期限估计的影响; 而对于 Lanczos 高通滤波, 其能有效地去除高频噪音继而提高系统的可预报期限的估计。这对实际气象观测资料中噪声的去除这一方面具有很大的启发意义。

随机误差在可预报性研究中主要有两个方面, 过去的研究主要针对的是数值模式已知控制方程这一方面, 讨论随机误差作为初始扰动场或作为随机外强迫项时对系统的可预报性会造成何种影响。本文从观测序列的角度出发, 利用 NMLE 方法研究得到了随机误差和初始误差对系统可预报性的影响方面的相对重要性主要取决于两者的相对大小。对于

另一方面随机误差作为模式方程的随机强迫项时 (Tippett and Chang, 2003), 其对系统可预报性的影响还需在将来做进一步深入的探讨。此外, 本文中使用的滤波方法主要是三点一次平滑和 Lanczos 滤波, 研究发现不同的滤波方案对试验序列的噪声的去除有着不同的效果, 进而也影响到系统的可预报期限的估计。何文平等 (2011) 在去趋势波动分析中使用 Vondrak 滤波得到了很好的去噪效果, 我们希望将来能应用此方法来进一步改进试验序列的去噪效果。

### 参考文献 (References)

陈静, 陈德辉, 颜宏. 2002. 集合数值预报发展与研究进展 [J]. 应用气象学报, 13 (4): 497-507. Chen Jing, Chen Dehui, Yan Hong. 2002. A brief review on the development of ensemble prediction system [J]. Journal of Applied Meteorological Science (in Chinese), 13 (4): 497-507.

丑纪范. 1990. 大气动力学的新进展 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 214pp. Chou Jifan. 1990. Progress in Atmospheric Dynamics [M] (in Chinese). Lanzhou: Lanzhou University Press, 214pp.

Devaney R L. 1989. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems [M]. Redwood City: Addison-Wesley.

Ding R Q, Li J P. 2007. Nonlinear finite-time Lyapunov exponent and predictability [J]. Physics Letters A, 364: 396-400.

丁瑞强, 李建平. 2008. 混沌系统可预报期限随初始误差变化规律研究 [J]. 物理学报, 57 (12): 7494-7499. Ding Ruiqiang, Li Jianping. 2008. Study on the regularity of predictability limit of chaotic systems with different initial errors [J]. Acta Physica Sinica (in Chinese), 57 (12): 7494-7499.

Ding R Q, Li J P. 2008. Comparison of the influences of initial error and model parameter error on the predictability of numerical forecast [J]. Chinese Journal of Geophysics, 51 (3): 718-724.

Ding R Q, Li J P, Ha K J. 2008. Trends and interdecadal changes of weather predictability during 1950s-1990s [J]. J. Geophys. Res., 113: D24112.

丁瑞强, 李建平. 2009. 非线性误差增长理论在大气可预报性中的应用 [J]. 气象学报, 67 (2): 241-249. Ding Ruiqiang, Li Jianping. 2009. Application of nonlinear error growth dynamics in studies of atmospheric predictability [J]. Acta Meteorologica Sinica (in Chinese), 67 (2): 241-249.

Ding R Q, Li J P. 2010. Comparisons of two ensemble mean methods in measuring the average error growth and the predictability [J]. Acta Meteorologica Sinica, 25 (4): 395-404.

段晚锁, 穆穆. 2006. 用非线性最优化方法研究 El Niño 可预报性的进展与前瞻 [J]. 大气科学, 30 (5): 759-766. Duan Wansuo, Mu Mu. 2006. Advance and prospect of the studies of El Niño

predictability by nonlinear optimization method [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 30 (5): 759-766.

Duan W S, Jiang Z N, Xu H. 2007. Progress in predictability studies in China (2003-2006) [J]. Advances in Atmospheric Sciences, 24 (6): 1086-1098.

Eckmann J P, Ruelle D. 1985. Ergodic theory of chaos and strange attractors [J]. Reviews of Modern Physics, 57: 617-656.

Fraedrich K. 1987. Estimating weather and climate predictability on attractors [J]. J. Atmos. Sci., 44: 722-728.

Fraedrich K. 1988. El Niño/Southern Oscillation predictability [J]. Mon. Wea. Rev., 116: 1001-1012.

Guckenheimer J, Holmes P J. 1983. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields [M]. New York: Springer-Verlag.

何文平, 封国林, 董文杰, 等. 2006. Lorenz 系统的可预报性 [J]. 物理学报, 55 (2): 969-977. He Wenping, Feng Guolin, Dong Wenjie, et al. 2006. On the predictability of the Lorenz system [J]. Acta Physica Sinica (in Chinese), 55 (2): 969-977.

何文平, 吴琼, 成海英, 等. 2011. 不同滤波方法在去趋势波动分析中去噪的应用比较 [J]. 物理学报, 60 (2): 029203. He Wenping, Wu Qiong, Cheng Haiying, et al. 2011. Comparison of applications of different filter methods for de-noising detrended fluctuation analysis [J]. Acta Physica Sinica (in Chinese), 60 (2): 029203.

Kazantsev E. 1999. Local Lyapunov exponents of the quasi-geostrophic ocean dynamics [J]. Applied Mathematics and Computation, 104: 217-257.

Lacarra J F, Talagrand O. 1988. Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model [J]. Tellus, 40A: 81-95.

李建平, 丑纪范. 2003. 非线性大气动力学的进展 [J]. 大气科学, 27 (4): 653-673. Li Jianping, Chou Jifan. 2003. Advances in nonlinear atmospheric dynamics [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 27 (4): 653-673.

李建平, 丁瑞强, 陈宝花. 2006. 大气可预报性研究的回顾与展望 [M]//21 世纪初大气科学发展的回顾与展望. 北京: 气象出版社, 96-103. Li Jianping, Ding Ruiqiang, Chen Baohua. 2006. Review and prospect on the predictability study of the atmosphere [M]//Frontier and Prospect of Atmospheric Sciences at the Beginning of the 21th Century (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 96-103.

李建平, 丁瑞强. 2008. 短期气候可预报期限的时空分布 [J]. 大气科学, 32 (4): 975-986. Li Jianping, Ding Ruiqiang. 2008. Temporal-spatial distributions of predictability limit of short-term climate [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 32 (4): 975-986.

李建平, 丁瑞强. 2009. 混沌系统单变量可预报性研究 [J]. 大气科学, 33 (3): 551-556. Li Jianping, Ding Ruiqiang. 2009. Studies of predictability of single variable from multi-dimensional chaotic dynamical system [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 33 (3): 551-556.

- Li J P, Wang S. 2008. Some mathematical and numerical issues in geophysical fluid dynamics and climate dynamics [J]. *Commun Comput Phys*, 3 (4): 759–793. 24
- Li J P, Ding R Q. 2011. Temporal-spatial distribution of atmospheric predictability limit by local dynamical analogs [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 139: 3265–3283.
- Lorenz E N. 1963. Deterministic nonperiodic flow [J]. *J. Atmos. Sci.*, 20: 130–141.
- Lorenz E N. 1965. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model [J]. *Tellus*, 17: 321–333.
- Lorenz E N. 1995. Predictability: A problem partly solved [C]. *Proceedings of a seminar held at ECMWF on predictability (I)*: 1–18.
- 罗哲贤. 1994. 热带气旋异常运动可预报性问题的理论研究 [J]. *气象*, 20 (12): 39–41. Luo Zhexian. 1994. Theoretical studies on the predictability of the tropical cyclone anormal motion [J]. *Meteorological Monthly (in Chinese)*, 20 (12): 39–41.
- May R M. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics [J]. *Nature*, 261: 459–467.
- Mu M. 2000. Nonlinear singular vectors and nonlinear singular values [J]. *Science in China (Series D)*, 43: 375–385.
- 穆穆, 李建平, 丑纪范, 等. 2002. 气候系统可预报性理论研究 [J]. *气候与环境研究*, 7 (2): 227–235. Mu Mu, Li Jianping, Chou Jifan, et al. 2002. Theoretical research on the predictability of climate system [J]. *Climatic and Environmental Research (in Chinese)*, 7 (2): 227–235.
- Palmer T N. 1999. A nonlinear dynamical perspective on climate prediction [J]. *J. Climate*, 12: 575–591.
- Thompson P D. 1957. Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large scale atmospheric flow pattern [J]. *Tellus*, 9: 275–295.
- Tippett M K, Chang P. 2003. Some theoretical considerations on predictability of linear stochastic dynamics [J]. *Tellus*, 55A: 148–157.
- 熊安元, 王颖. 2007. 气候平均值和方差的次序统计估计量 [J]. *南京气象学院学报*, 30 (5): 694–698. Xiong Anyuan, Wang Ying. 2007. Order statistics of mean and variance for climatic data [J]. *Journal of Nanjing Institute of Meteorology (in Chinese)*, 30 (5): 694–698.
- Yoden S, Nomura M. 1993. Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability [J]. *J. Atmos. Sci.*, 50: 1531–1543.
- 郑飞, 王慧, 朱江. 2009. 初始误差和模式误差对 ENSO 集合预报的影响 [J]. *科学通报*, 54 (16): 2395–2401. Zheng Fei, Wang Hui, Zhu Jiang. 2009. ENSO ensemble prediction: Initial error perturbations vs. model error perturbations [J]. *Chinese Science Bulletin (in Chinese)*, 54 (16): 2395–2401.
- Ziehmann C, Smitha L A, Kurths J. 2000. Localized Lyapunov exponents and the prediction of predictability [J]. *Physics Letters A*, 271: 237–251.